

05 - Lógica de predicados

Matemática Discreta

Sheila Moraes de Almeida

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

14 de abril de 2023



Referência Bibliográfica

Este material foi preparado usando como referência o livro **GERSTING, Judith L.**, *Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics*, 7th ed., 2014.

Validade dos Argumentos

Como verificar a validade dos argumentos na Lógica de Predicados?

Como o valor-verdade das expressões depende da interpretação (domínio e predicados), não é possível expressar todas as possibilidades em uma tabela verdade.

Usamos sequências de provas!

Todas as regras de inferência da Lógica Proposicional são válidas na Lógica de Predicados.

Instanciação Universal

Dada uma expressão

$$\forall xP(x)$$

pode-se concluir que é verdadeira:

$$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge P(d), \dots$$

com a conjunção de predicados de todos os elementos do domínio.

Por simplificação, pode concluir que

$P(a)$ é verdade, onde a é um elemento do domínio.

Instanciação Universal

Exemplo de instanciação universal

Aristóteles disse:

“Todos os humanos são mortais. Sócrates é humano. Portanto, Sócrates é mortal.”

Usando Lógica de Predicados:

$H(x)$: x é humano.

$M(x)$: x é mortal.

s é uma constante, $s = \text{Sócrates}$ (um elemento do domínio dos humanos)

Argumento: $\forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s) \rightarrow M(s)$

Instanciação Universal

Vejamos uma sequência de prova para o argumento

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s) \rightarrow M(s)$$

1. $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$, hipótese.
2. $H(s)$, hipótese.
3. $H(s) \rightarrow M(s)$, instanciação universal em 1, para s pertencente ao domínio.
4. $M(s)$, modus ponens em 2 e 3.

Observe que no passo (3), podemos escrever a implicação da hipótese sem o quantificador, por restringirmos a um único elemento do domínio.

Instanciação Existencial

Dada uma expressão

$$\exists xP(x)$$

pode-se concluir que:

$$P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee P(d) \vee \dots$$

com a disjunção de predicados de todos os elementos do domínio.

Isso implica que para algum elemento do domínio o predicado P é verdade e podemos dar um nome para esse elemento específico.

Instanciação Existencial

Vamos usar instanciação universal e existencial para provar:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists yP(y) \rightarrow \exists yQ(y)$$

Instanciação Existencial

Vamos usar instanciação universal e existencial para provar:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists yP(y) \rightarrow \exists yQ(y)$$

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, hipótese.
2. $\exists yP(y)$, hipótese.
3. $P(a)$, instanciação existencial em (2), para algum elemento a do domínio.
4. $P(a) \rightarrow Q(a)$, instanciação universal em (1), para o elemento a .
5. $Q(a)$, modus ponens em (3) e (4).
6. $\exists yQ(y)$, existe um elemento, que é a .

Instanciação Existencial

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, hipótese.
2. $\exists yP(y)$, hipótese.
3. $P(a)$, instanciação existencial em (2), para algum elemento a do domínio.
4. $P(a) \rightarrow Q(a)$, instanciação universal em (1), para o elemento a .
5. $Q(a)$, modus ponens em (3) e (4).
6. $\exists yQ(y)$, existe um elemento, que é a .

Observe que os passos (3) e (4) não podem ser invertidos. Suponha que por $P(a) \rightarrow Q(a)$ ser verdade para todos, consideramos um a em particular. Como ter certeza que é para este a que $P(a)$ é verdadeira?

Generalização Existencial

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists yP(y) \rightarrow \exists yQ(y)$$

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, hipótese.
2. $\exists yP(y)$, hipótese.
3. $P(a)$, instanciação existencial em (2), para algum elemento a do domínio.
4. $P(a) \rightarrow Q(a)$, instanciação universal em (1), para o elemento a .
5. $Q(a)$, modus ponens em (3) e (4).
6. $\exists yQ(y)$, existe um elemento, que é a .

O passo 6 é chamado de **generalização existencial**.

Generalização Universal

Se uma variável

- não resulta de instanciação existencial;
- e nem é variável livre,

então é **um elemento qualquer do domínio**.

Qualquer informação dita sobre um elemento qualquer do domínio é uma **generalização universal** para todos os elementos do domínio.

Generalização Universal

Vamos provar o argumento:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$$

Generalização Universal

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$$

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, hipótese.
2. $\forall xP(x)$, hipótese.
3. $P(a) \rightarrow Q(a)$, instanciação universal em (1), a é qualquer elemento do domínio.
4. $P(a)$, instanciação universal em (2), a é qualquer elemento do domínio.
5. $Q(a)$, modus ponens em (3) e (4).
6. $\forall xQ(x)$, generalização universal em (5): já que a é qualquer elemento do domínio, vale para todo x .

Instanciação e Generalização

Estratégia de prova

É importante observar a estratégia de prova da Lógica de Predicados:

consiste em

- utilizar instanciações e generalizações universais e existenciais para obter expressões lógicas sem quantificadores;
- usar as regras de inferência e equivalências lógicas da Lógica Proposicional para manipular as premissas sem quantificadores;
- quando necessário, usar generalizações e instanciações para chegar à conclusão com quantificadores.

Instanciação e Generalização

Cuidado!

1. $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$, hipótese.
2. $P(a) \wedge Q(a)$, instanciação existencial em (1).

Instanciação existencial incorreta: em (1) diz que existe um elemento que satisfaz $P(x)$ e em (2) diz que existe um elemento que satisfaz $Q(x)$, mas os quantificadores tem escopos separados e o elemento pode não ser o mesmo (já que não é para todo).

Instanciação e Generalização

Forma correta para o caso anterior:

1. $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$, hipótese.
2. $P(a)$, instanciação existencial em (1).
3. $Q(b)$, instanciação existencial em (1), onde b pode ser diferente de a .

Provas na Lógica de Predicados

Vamos provar:

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$$

Provas na Lógica de Predicados

Vamos provar:

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$$

1. $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$, hipótese.
2. $P(x) \wedge Q(x)$, instanciação universal em (1).
3. $P(x)$, simplificação em (2).
4. $Q(x)$, simplificação em (2).
5. $\forall xP(x)$, generalização universal em (3).
6. $\forall xQ(x)$, generalização universal em (4).
7. $\forall xQ(x) \wedge \forall xQ(x)$, conjunção em (5) e (6).

Provas com Hipótese Temporária

Hipótese Temporária

Assumindo temporariamente alguma hipótese $T(x)$ e usando as demais premissas e equivalências lógicas e regras de inferência, pode-se eventualmente concluir $Q(x)$.

Então, sabemos que se $T(x)$ for verdade, então $Q(x)$ será verdade.

Podemos então, descartar a hipótese temporária e utilizar com segurança a premissa:

$$T(x) \rightarrow Q(x)$$

É uma ferramenta útil em algumas demonstrações, como veremos.

Provas com Hipótese Temporária

Vamos provar:

$$(P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y)) \rightarrow \forall y (P(x) \rightarrow Q(x, y))$$

Provas com Hipótese Temporária

Vamos provar:

$$(P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y)) \rightarrow \forall y (P(x) \rightarrow Q(x, y))$$

1. $P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y)$, hipótese.
2. $P(x)$, hipótese temporária.
3. $\forall y Q(x, y)$, modus ponens em (1) e (2).
4. $Q(x, y)$, instanciação universal em (3), para y qualquer do domínio.
5. $P(x) \rightarrow Q(x, y)$, descartando a hipótese temporária $P(x)$.
6. $\forall y (P(x) \rightarrow Q(x, y))$, generalização universal em (5).

Provas com Hipótese Temporária

Para provar: $\neg(\exists x A(x)) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$.

Temos que provar duas implicações:

1. $\neg(\exists x A(x)) \rightarrow \forall x \neg A(x)$.
2. $\forall x \neg A(x) \rightarrow \neg(\exists x A(x))$.

Provas com Hipótese Temporária

Prova de ida:

$$\neg(\exists xA(x)) \rightarrow \forall x\neg A(x)$$

1. $\neg\exists xA(x)$, hipótese.
2. $A(a)$, hipótese temporária.
3. $\exists xA(x)$, generalização existencial em (2).
4. $A(a) \rightarrow \exists xA(x)$, descartando a hipótese temporária $A(x)$.
5. $\neg A(a)$, modus tollens, (1) e (4).
6. $\forall x\neg A(x)$, generalização universal de (5), possível já que a é variável livre.

Provas com Hipótese Temporária

Prova de volta: $\forall x \neg A(x) \rightarrow \neg(\exists x A(x))$

1. $\forall x \neg A(x)$, hipótese.
2. $\exists x A(x)$, hipótese temporária.
3. $A(a)$, instanciação existencial em (2).
4. $\neg(\forall x \neg A(x))$, (3) e definição de quantificador universal.
5. $\exists x A(x) \rightarrow \neg \forall x \neg A(x)$, descartando a hipótese temporária.
6. $\neg(\neg \forall x \neg A(x)) \rightarrow \neg(\exists x A(x))$, contraposição em (5).
7. $\forall x \neg A(x) \rightarrow \neg(\exists x A(x))$, dupla negação em (6).
8. $\neg(\exists x A(x))$, modus ponens em (1) e (7).

Provas Usando o Método Dedutivo

Vamos provar:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow [(\neg \exists x P(x)) \rightarrow \forall x Q(x)]$$

Provas Usando o Método Dedutivo

Vamos provar:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow [(\neg \exists x P(x)) \rightarrow \forall x Q(x)]$$

Pelo Método Dedutivo podemos reescrever:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg \exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Provas Usando o Método Dedutivo

Vamos provar: $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg\exists xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, hipótese.
2. $\neg\exists xP(x)$, hipótese.
3. $P(x) \vee Q(x)$, instanciação universal em (1).
4. $\forall x\neg P(x)$, negação em (2).
5. $\neg P(x)$, instanciação universal em (4).
6. $\neg P(x) \rightarrow Q(x)$, regra da implicação em (3).
7. $Q(x)$, modus ponens em (5) e (6).
8. $\forall xQ(x)$, generalização universal em (7).

Argumentos em Língua Natural

Diga se este argumento é válido:

Todo computador tem uma porta serial. Alguns computadores tem uma porta paralela.
Portanto, alguns computadores tem porta serial e paralela.

Representação em Lógica de Predicados:

Domínio: todos os computadores.

$S(x)$: x tem porta serial.

$P(x)$: x tem porta paralela.

$\forall xS(x) \wedge \exists xP(x) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$.

Argumentos em Língua Natural

Vamos provar: $\forall xS(x) \wedge \exists xP(x) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$.

1. $\forall xS(x)$, hipótese.
2. $\exists xP(x)$, hipótese.
3. $P(a)$, instanciação existencial em (2).
4. $S(a)$, instanciação universal em (1).
5. $S(a) \wedge P(a)$, conjunção em (3) e (4).
6. $\exists x(S(x) \wedge P(x))$, generalização existencial em (5).