01 - Lógica proposicional

Matemática Discreta

Sheila Morais de Almeida

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

12 de abril de 2023

Referência Bibliográfica

Este material foi preparado usando como referência o livro **GERSTING, Judith L.**, *Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics, 7th ed., 2014.*

O caso do advogado de defesa

Se meu cliente é culpado, então a faca estava na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta, ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá em 10 de outubro, então Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá em 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos nós sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente.

O argumento do advogado parece correto?
Se você fosse um membro do júri, como votaria?

Lógica Formal

Lógica formal pode ser usada para representar sentenças da língua natural que usamos para comunicar fatos ou informações.

Auxilia na compreenção e na determinação da veracidade de argumentos apresentados.

Proposição

Proposição

É uma sentença que declara um fato, que obrigatoriamente é verdadeiro ou falso, mas não ambos.

São proposições?

- Dez é menor que sete.
- Toronto é a Capital do Canadá.
- Ele é um excelente ator.
- Existe vida em outras planetas.

Proposição

Proposição

É uma sentença que declara um fato, que obrigatoriamente é verdadeiro ou falso, mas não ambos.

São proposições?

- Dez é menor que sete. ✓
- Toronto é a Capital do Canadá. ✓
- Ele é um excelente ator. X
- Existe vida em outras planetas. ✓

Valor-verdade

Valor-verdade

Toda proposição tem um valor-verdade: ou é verdadeira ou é falsa.

A lógica baseada em proposições é chamada de Cálculo Proposicional ou Lógica Proposicional.

Lógica Proposicional

Proposições podem ser representadas por letras, geralmente são A, B, C, etc.

Proposições compostas são criadas a partir de proposições existentes utilizando-se operadores lógicos.

Operadores Lógicos

Sentenças podem ser combinadas ou terem seus valores-verdade alterados por operadores.

Conectivos Lógicos

São operadores lógicos que criam novas proposições a partir de duas ou mais sentenças existentes.

Exemplo:

- João foi bem na prova ou precisa estudar mais.
- Hoje choveu e fez calor.

Operadores Lógicos

Conjunção

É a proposição composta $A \wedge B$. Lê-se "A e B".

Seu valor-verdade é verdadeiro somente quando A é verdadeira e B é verdadeira.

Exemplo:
A: "Hoje é sexta-feira." B: "Hoje está chovendo."

$A \wedge B$ Hoje é quarta-feira e está chovendo.

Qual o valor verdade dessa proposição?

Operadores Lógicos

Tabelas verdade são uma forma metódica de expressar o valor verdade de proposições compostas ou alteradas por operadores lógicos.

Na tabela verdade, são listados todos os possíveis valores-verdade das sentenças simples e o valor-verdade da sentença composta.

Tabela-verdade da conjunção

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operadores Lógicos

Atenção: "mas" também é uma conjunção.

Exemplo: O sol está brilhando, mas está chovendo.

A: o sol está brilhando.

B: está chovendo.

Pergunta: Se só A ou só B for verdade, a frase do exemplo será verdade?

Operadores Lógicos

Disjunção

É a proposição composta $A \vee B$. Lê-se "A ou B".

Seu valor-verdade é verdadeiro quando pelo menos uma das sentenças é verdadeira.

Exemplo: Maria vai ao cinema com Joana ou ficará em casa ajudando a mãe a fazer bolo.

Exemplo: O céu é azul ou branco. (Observe que pode ser ambos.)

Operadores Lógicos

Tabela-verdade da disjunção

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operadores Lógicos

Negação

A partir de uma proposição A pode-se criar uma nova proposição cujo valor verdade seja o contrário de A.

Tal sentença, chamada de **negação de** A, é denotada por $\neg A$ ou $\overline{A}$ ou A'.

Neste material, a negação de A será denotada por A'. Lê-se "não A".

Operadores Lógicos

Negação

Exemplos: Qual a negação das seguintes proposições:

- Hoje é sexta-feira.
- No mínimo 10mm de chuva caíram hoje em São Paulo.

Negação

Exemplos: Qual a negação das seguintes proposições:

- Hoje é sexta-feira. Hoje não é sexta-feira.
- No mínimo 10mm de chuva caíram hoje em São Paulo.
  Caíram menos que 10 mm de chuva hoje em São Paulo.

Operadores Lógicos

Tabela verdade da negação

A	A'
V	F
F	V

Operadores Lógicos

Implicação

É a proposição composta $A \to B$, na qual sempre que A for verdade, B será verdade.

Lê-se "se A, então B" ou "A implica B".

Terminologia:

A proposição A é a hipótese, antecedente ou premissa.

A proposição B é a conclusão ou consequência.

A implicação também é chamada de proposição condicional.

Operadores Lógicos

Exemplos:

Se eu for eleito, vou diminuir os impostos.

Se você tirar nota 10 na P_1, então terá média final 10.

Operadores Lógicos

Tabela verdade da implicação

A	B	$A \to B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Operadores Lógicos

Outras formas de ler a implicação $A \rightarrow B$ na língua natural:

- A somente se B.
- se A, B.
- A é suficiente para B.
- B se A.
- B quando ocorrer A.
- uma condição necessária para A é B.
- B a menos que A'.
- A apenas se B.
- uma condição suficiente para B é A.
- B sempre que A.
- B é necessário para A.

Operadores Lógicos

Quando uma condicional envolve informações de tempo como hoje, amanhã, ontem, agora, etc. ou iformações de lugar, como aqui, lá, nesta cidade, etc., o leitor deve considerar o momento presente e local em que está.

Qual o valor verdade de:

1. Se aqui é uma sala de aula, então $1 + 1 = 3$.

2. Se $1 + 1 = 3$, então amanhã é terça-feira.

Operadores Lógicos

Quando uma condicional envolve informações de tempo como hoje, amanhã, ontem, agora, etc. ou informações de lugar, como aqui, lá, nesta cidade, etc., o leitor deve considerar o momento presente e local em que está.

Qual o valor verdade de:

1. Se aqui é uma sala de aula, então $1 + 1 = 3$.
   Se você estiver em uma sala de aula quando ler, então é falsa, senão é verdadeira.

2. Se $1 + 1 = 3$, então amanhã é terça-feira.
   É verdadeira, não importa se amanhã é terça-feira ou não.

Operadores Lógicos

Bicondicional

Bicondicional ou biimplicação ou equivalência é a proposição composta $A \leftrightarrow B$, em que o valor-verdade é verdadeiro somente nos casos em que A e B têm o mesmo valor-verdade.

Lê-se A se, e somente se, B.

Exemplos de proposições:

- O quintal fica molhado se, e somente se, chove.
- Eu sou brasileiro se, e somente se, nasci no Brasil.

Operadores Lógicos

A biimplicação $A \leftrightarrow B$ é resultado da conjunção $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Confira:

Tabela verdade do operador bicondicional

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$A \leftrightarrow B$ $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fórmulas bem-formadas

Nós podemos usar parênteses e conectivos lógicos para criar proposições compostas:

$$(A \to B) \land (B \to A)$$

Mas é preciso obedecer algumas regras de sintaxe para formar novas proposições. Por exemplo:

$$A)) \land \land \to BC$$

não é uma proposição. Dizemos que não é uma **fórmula bem formada**.

Precedência de Operadores Lógicos

Operador	Prioridade
conectivos entre parênteses	1
$'$	2
$\wedge$, $\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

(quanto menor o número, mais alta a prioridade)

Precedência na Tabela verdade

Deve-se determinar primeiro os valores-verdades das expressões dentro de parênteses, depois os operadores, em ordem de prioridade:

Exemplo: $A \vee B' \to (A \vee B)'$

Tabela verdade

A	B	$A \vee B$	B'	$(A \vee B)'$	$A \vee B'$	$A \vee B' \to (A \vee B)'$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Precedência na Tabela verdade

Exemplo: $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$

Tabela verdade

A	B	$A \vee B$	B'	$(A \vee B)'$	$A \vee B'$	$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Quantas linhas têm a tabela verdade de uma proposição com n variáveis?

Precedência na Tabela verdade

Exemplo: $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$

Tabela verdade

A	B	$A \vee B$	B'	$(A \vee B)'$	$A \vee B'$	$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Quantas linhas têm a tabela verdade de uma proposição com n variáveis? 2^n

Contradição

Contradição

É uma sentença lógica composta cujo valor-verdade é sempre falso.

Exemplo: $(A \to B) \wedge A \wedge B'$ é uma contradição.

Tabela Verdade

A	B	$A \to B$	B'	$(A \to B) \wedge A \wedge B'$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	F

Tautologia

Tautologia

Uma **tautologia** é uma sentença lógica cujo valor-verdade é sempre verdade, independente dos valores-verdade das setenças que a compõe.

Exemplo: $A \vee B' \rightarrow (A' \wedge B)'$ é uma tautologia.

Tabela verdade

A	B	A'	$A' \wedge B$	B'	$(A' \wedge B)'$	$A \vee B'$	$A \vee B' \rightarrow (A' \wedge B)'$
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V

Tautologia

Exemplo: $A \vee B' \to (A \vee B)'$ não é uma tautologia, nem contradição.

A	B	$A \vee B$	B'	$(A \vee B)'$	$A \vee B'$	$A \vee B' \to (A \vee B)'$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Equivalências Lógicas

Duas proposições A e B são equivalentes quando $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia.

Algumas equivalências lógicas:

- $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (propriedade comutativa)
- $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ (propriedade comutativa)
- $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (propriedade associativa)
- $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (propriedade associativa)
- $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (propriedade distributiva)
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (propriedade distributiva)
- $A \vee F \Leftrightarrow A$ (identidade)
- $A \wedge V \Leftrightarrow A$ (identidade)
- $A \vee A' \Leftrightarrow V$ (complemento)
- $A \wedge A' \Leftrightarrow F$ (complemento)

Equivalências Lógicas

Para verificar se duas sentenças lógicas são equivalentes, pode-se usar a tabela verdade.

Vamos verificar as Leis de De Morgan:
$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	A'	B'	$A' \wedge B'$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Equivalências Lógicas

Vamos verificar outra Lei de De Morgan:
$(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B)'$	A'	B'	$A' \vee B'$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V