Relações de Recorrência

Profa. Sheila Morais de Almeida
Mayara Omai

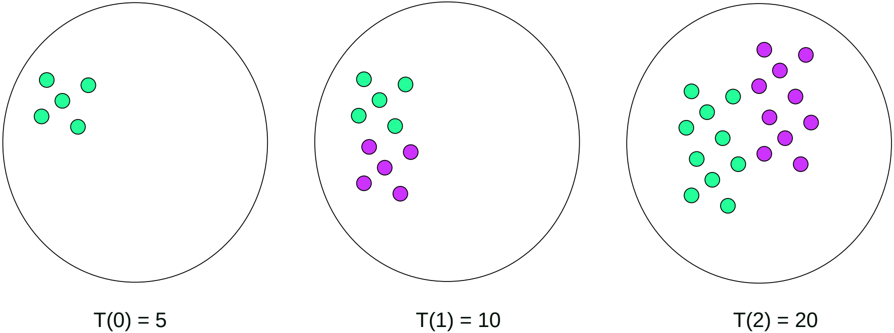
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Ponta Grossa

2018

Problema do número de bactérias na colônia

- A colônia se iniciou com 5 bactérias.
- O número de bactérias em uma colônia dobra a cada hora.
- Quantas bactérias existirão em n horas?

Relações de Recorrência - Introdução



Seja $T(n)$ o número de bactérias após n horas.

- O número de bactérias em uma colônia dobra a cada hora.
  Então para qualquer $T(n)$, sabemos que $T(n) = 2T(n-1)$.
- A colônia se iniciou com 5 bactérias.
  Então sabemos que $T(0) = 5$
- Quantas bactérias existirão em n horas?
  É possível construirmos uma fórmula para determinar o valor de $T(n)$?

$$T(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0, \\ 2T(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

É uma **relação de recorrência**.

Relações de Recorrência - Definição

Relação de Recorrência

Uma relação de recorrência para uma sequência a_n é uma equação que expressa a_n a partir

- dos primeiros termos da sequência (um ou mais primeiros termos); e
- de uma regra para determinar os próximos termos a partir daqueles que os precedem.

Relações de Recorrência - Definição

Dizemos que uma sequência **satisfaz a relação de recorrência** quando seus termos obedecem a regra da relação de recorrência.

Dizemos que uma equação **é uma solução para a relação de recorrência** se, para todo n, a equação calcula o mesmo termo a_n que a regra da relação de recorrência.

Relações de Recorrência - Exemplo 2

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0, \\ 5, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Quais os valores de a_2 e a_3?

Relações de Recorrência - Exemplo 2

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0, \\ 5, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Quais os valores de a_2 e a_3?

$a_2 = a_{2-1} - a_{2-2} = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2.$

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0, \\ 5, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Quais os valores de a_2 e a_3?

$a_2 = a_{2-1} - a_{2-2} = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2.$

$a_3 = a_{3-1} - a_{3-2} = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3.$

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 3n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 3n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 3n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 3n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 3n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. Como $a_n = 3n$, então $a_{n-1} = 3(n-1) = 3n - 3$ e $a_{n-2} = 3(n-2) = 3n - 6$.

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 3n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 3n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. Como $a_n = 3n$, então $a_{n-1} = 3(n-1) = 3n - 3$ e $a_{n-2} = 3(n-2) = 3n - 6$.

Portanto, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3n - 3) - (3n - 6) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n$.

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 3n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 3n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. Como $a_n = 3n$, então $a_{n-1} = 3(n-1) = 3n - 3$ e $a_{n-2} = 3(n-2) = 3n - 6$.

Portanto, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3n - 3) - (3n - 6) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n$.

Desta forma, sim! $a_n = 3n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Relações de Recorrência - Exemplo 4

Pergunta: $a_n = 2^n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Relações de Recorrência - Exemplo 4

Pergunta: $a_n = 2^n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 2^n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Relações de Recorrência - Exemplo 4

Pergunta: $a_n = 2^n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 2^n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(2^{n-1}) - (2^{n-2}) = 2^n - 2^{n-2} = (2^2)(2^{n-2}) - 2^{n-2} = 3(2^{n-2})$.

Relações de Recorrência - Exemplo 4

Pergunta: $a_n = 2^n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 2^n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(2^{n-1}) - (2^{n-2}) = 2^n - 2^{n-2} = (2^2)(2^{n-2}) - 2^{n-2} = 3(2^{n-2})$.

Então quando $n = 2$ temos: $2^n = 2^2 = 3(2^{n-2}) = 3(2^0)$, ou seja, $4 = 3$, que é falso!

Portanto, não! $a_n = 2^n$ não é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Relações de Recorrência - Exemplo 5

Pergunta: $a_n = 5$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Pergunta: $a_n = 5$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 5$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Pergunta: $a_n = 5$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 5$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(5) - 5 = 5$.

Relações de Recorrência - Exemplo 5

Pergunta: $a_n = 5$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 5$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(5) - 5 = 5$.

Portanto, sim! $a_n = 5$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Problema de Fibonacci

- Um jovem casal de coelhos é colocado em uma ilha.
- Um casal de coelhos não procria até que eles tenham dois meses de idade.
- Depois que eles completam dois meses de idade, cada casal de coelhos produz outro casal todo mês.
- Suponha que nenhum coelho morra, encontre a relação de recorrência para o número de casais de coelhos na ilha após n meses.

Relações de Recorrência - Exemplo 6

- Um jovem casal de coelhos é colocado em uma ilha.
  $a_0 = 1$

- Um casal de coelhos não procria até que eles tenham dois meses de idade.
  $a_1 = 1$.

Relações de Recorrência - Exemplo 6

- Depois que eles completam dois meses de idade, cada casal de coelhos produz outro casal todo mês.
  - todos que existiam no mês passado contam. São a_{n-1}.
  - todos os casais que existem a pelo menos dois meses se reproduzem e criam mais um casal cada.

    Quantos casais existem há pelo menos dois meses?

Relações de Recorrência - Exemplo 6

- Depois que eles completam dois meses de idade, cada casal de coelhos produz outro casal todo mês.
  - todos que existiam no mês passado contam. São a_{n-1}.
  - todos os casais que existem a pelo menos dois meses se reproduzem e criam mais um casal cada.

    Quantos casais existem há pelo menos dois meses?a_{n-2}

    Então são criados a_{n-2} novos casais.

- Depois que eles completam dois meses de idade, cada casal de coelhos produz outro casal todo mês.
  - todos que existiam no mês passado contam. São a_{n-1}.
  - todos os casais que existem a pelo menos dois meses se reproduzem e criam mais um casal cada.

    Quantos casais existem há pelo menos dois meses?a_{n-2}

    Então são criados a_{n-2} novos casais.
  - Somando todos: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Relação de recorrência para o Problema de Fibonacci:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 1, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Um jogo com:

- três pinos;
- um conjunto de discos;

Começo do jogo: os discos estão dispostos no pino mais a esquerda, em ordem decrescente de tamanho (o maior embaixo).

Relações de Recorrência - Exemplo 7

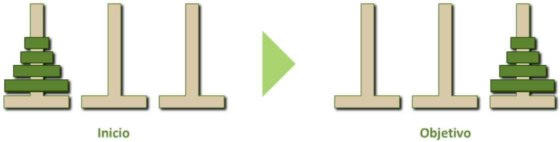
Cada movimento permite ter somente um disco fora dos pinos.

Relações de Recorrência - Exemplo 7

Cada disco pode ser retirado de um pino e colocado em outro.

Não é permitido um disco ser colocado sobre outro menor que ele.

Relações de Recorrência - Exemplo 7



O objetivo é transferir a torre toda do pino da esquerda para o pino da direita.

Problema das Torres de Hanoi

Encontre uma relação de recorrência para determinar o número de movimentos necessários para transferir uma torre com n discos.

Com 1 disco: 1 movimento.

Com dois discos: 3 movimentos.

Com n discos:

- número de movimentos necessários para mover os $n-1$ primeiros discos para o pino do meio
- mais um movimento para mover o maior disco para o pino da direita
- mais número de movimentos para mover os $n-1$ discos do pino do meio para o pino da direita.
- Somando tudo: $2a_{n-1}+1$.

Relações de Recorrência - Exemplo 7

Relação de recorrência para o Problema das Torres de Hanoi:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 2a_{n-1} + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Determinação a partir dos primeiros termos da sequência

Considere a relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0, \\ 2T(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

O método da determinação a partir dos primeiros termos da sequência consiste em identificar um padrão para a relação de recorrência ao se conhecer os valores inciais da sequencia.

Vejamos o que acontece com os primeiros termos na relação de recorrência apresentada:

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
0	5	5
1	$2 \cdot (5)$	$2 \cdot 5$
2	$2 \cdot (2 \cdot (5))$	$2^2 \cdot 5$
3	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5)))$	$2^3 \cdot 5$
4	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5))))$	$2^4 \cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2(\ldots 2 \cdot (5))))$	?

Determinação a partir dos primeiros termos da sequência

Observe que neste caso o valor de n coincide com o expoente em $T(n)$:

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
0	5	5
1	$2 \cdot (5)$	$2^{1} \cdot 5$
2	$2 \cdot (2 \cdot (5))$	$2^{2} \cdot 5$
3	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5)))$	$2^{3} \cdot 5$
4	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5))))$	$2^{4} \cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2(\ldots 2 \cdot (5))))$	?

Determinação a partir dos primeiros termos da sequência

Observando, podemos criar uma hipótese sobre a fórmula fechada para $T(k)$, onde k é um inteiro positivo qualquer:

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
0	5	5
1	$2 \cdot (5)$	$2^1 \cdot 5$
2	$2 \cdot (2 \cdot (5))$	$2^2 \cdot 5$
3	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5)))$	$2^3 \cdot 5$
4	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5))))$	$2^4 \cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2(\ldots 2 \cdot (5))))$	$2^k \cdot 5$

Para garantir que nossa hipótese é correta, podemos prová-la por indução.

Hipótese de indução: a solução da recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0, \\ 2T(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

é $T(n) = 2^n \cdot 5$.

Base: está no slide anterior.

Determinação a partir dos primeiros termos da sequência

Passo da indução: Devemos provar que $T(n+1) = 2^{n+1} \cdot 5$.

Primeiro, observe que pela definição da relação de recorrência, $T(n+1) = 2T(n)$.

Pela hipótese de indução, $T(n) = 2^n \cdot 5$.

Substituindo a fórmula da hipótese na definição de $T(n+1)$, temos:

$$T(n+1) = 2T(n) = 2 \cdot (2^n \cdot 5) = 2^{n+1} \cdot 5$$

Visto que a fórmula da nossa hipótese também responde corretamente para o caso $n+1$, pode-se concluir que trata-se de uma fórmula fechada para a relação de recorrência dada. $\square$

Expansão da Relação de Recorrência

Considere a mesma relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0, \\ 2T(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Expansão da Relação de Recorrência

O método da expansão consiste em substituir os termos da relação de recorrência pela fórmula dos mesmos em função de termos anteriores e, por fim, criar uma hipótese para a fórmula fechada.

Vejamos o que acontece na expansão da relação de recorrência apresentada:

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
$T(n) =$	$2T(n-1)$	$2^1 T(n-1)$
$=$	$2(2T(n-2))$	$2^2 T(n-2)$
$=$	$2(2(2T(n-3)))$	$2^3 T(n-3)$
$=$	$2(2(2(2T(n-4))))$	$2^4 T(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$=$	$2(2(2(2 \ldots 2T(0))))$	$2^? T(0)$

Expansão da Relação de Recorrência

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
$T(n) =$	$2T(n-1)$	$2^1 T(n-1)$
$=$	$2(2T(n-2))$	$2^2 T(n-2)$
$=$	$2(2(2T(n-2)))$	$2^3 T(n-3)$
$=$	$2(2(2(2T(n-2))))$	$2^4 T(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$=$	$2(2(2(2\ldots 2T(1))))$	$2^k T(n-k)$

Resta saber qual o valor de k para que a fórmula seja escrita em função de $T(0)$.

Isso vai acontecer quando $n - k = 0$. Então $k = n$.

Expansão da Relação de Recorrência

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
$T(n) =$	$2T(n-1)$	$2^{1}T(n-1)$
$=$	$2(2T(n-2))$	$2^{2}T(n-2)$
$=$	$2(2(2T(n-2)))$	$2^{3}T(n-3)$
$=$	$2(2(2(2T(n-2))))$	$2^{4}T(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$=$	$2(2(2(2\ldots 2T(0))))$	$2^{k}T(n-k)$

Quando $k = n$: $T(n) = 2^{n}T(n-(n)) = 2^{n}T(0) = 2^{n} \cdot 5$.

Expansão da Relação de Recorrência

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
$T(n) =$	$2T(n-1)$	$2^1 T(n-1)$
$=$	$2(2T(n-2))$	$2^2 T(n-2)$
$=$	$2(2(2T(n-2)))$	$2^3 T(n-3)$
$=$	$2(2(2(2T(n-2))))$	$2^4 T(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$=$	$2(2(2(2\ldots 2T(0))))$	$2^k T(n-n)$

Hipótese: $T(n) = 2^n \cdot 5.$

Para garantir que nossa hipótese é correta, podemos prová-la por indução.

Lembre-se que já fizemos essa prova hoje!

Referências

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).