Aula 4 - Somatórios

Profa. Sheila Morais de Almeida
Mayara Omai

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Ponta Grossa

2018

Somatórios

Definição

Somatório (ou Somatória) é uma forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente.

Exemplo:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

É a soma de termos que são números inteiros consecutivos, a partir do número 1.

Somatórios

Outro exemplo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)$$

É a soma de termos que são números ímpares consecutivos, a partir do número 1.

Somatórios

Exemplo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k$$

É a soma de termos que são potências de 2 consecutivas, a partir de 2^0.

Somatórios - Notação Sigma

O somatório, também chamado de **Notação Sigma**, pode ser denotado como segue.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

ou

$$\textstyle\sum_{i=m}^{n} a_i$$

onde:

$\sum$ - é a letra grega **sigma** maiúsculo que denota o somatório

m - é o **limite inferior do somatório**

n - é o **limite superior do somatório**

i - é o **índice do somatório**[1]

---

[1] A notação a_i, é um lembrete de que a expressão deve ser calculada para i assumindo diferentes valores.

Somatórios - Notação Sigma

Exemplo:

Como denotamos o somatório dos termos a seguir?

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 100 = ?$$

Somatórios - Notação Sigma

Exemplo:

Como denotamos o somatório dos termos a seguir?

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 100 = ?$$

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 100 = \sum_{i=0}^{100} i$$

Somatórios - Notação Sigma

Outro exemplo:

Como denotamos o somatório dos termos a seguir?

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = ?$$

Somatórios - Notação Sigma

Outro exemplo:

Como denotamos o somatório dos termos a seguir?

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = ?$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = \sum_{j=1}^{n} 2j$$

Somatórios - Notação Sigma

Outro exemplo:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^{n} 2i + 1$$

Somatórios - Notação Sigma

Exemplo: Seja $A = \{2, 4, 5\}$

$$\sum_{k \in A} k(6 - k) =$$

Somatórios - Notação Sigma

Exemplo: Seja $A = \{2, 4, 5\}$

$$\sum_{k \in A} k(6-k) = 2 \times 4 + 4 \times 2 + 5 \times 1$$

$$= 8 + 8 + 5$$

$$= 21$$

Casos especiais

Existem alguns casos especias a serem considerados, estes são apresentados a seguir.

$$\sum_{i=m}^{n} 0 = 0$$

Neste caso, a expressão dentro do somatório é a constante 0, que tem o valor 0 independentemente do valor do índice do somatório. A soma de qualquer número de 0's é 0.

Casos especiais

Outro caso:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 \ldots + 1 = n \times 1 = n$$

Novamente, a expressão dentro do somatório é uma constante, e o somatório indica que deve-se somar n cópias de 1, o que resulta em n.

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{100} 2 = 100 \times 2 = 200$$

Manipulação de Somatórios

Seja uma constante $\mathcal{C} \in \mathcal{R}$, então:

$$\sum_{k=m}^{n} \mathcal{C} = (n - m + 1)\mathcal{C}$$

Exemplos:

$$\sum_{k=1}^{10} 5 = (10 - 1 + 1) \times 5 = 50$$

$$\sum_{k=2}^{13} 1 = (13 - 2 + 1) \times 1 = 12 \times 1 = 12$$

Casos especiais

$$\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$$

Neste caso, o limite superior é menor que o limite inferior; a interpretação usual de somatórios não se aplica, mas, por convenção, atribui-se o valor 0 ao somatório.

Somatórios Básicos

Podemos provar que:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Obs: As provas foram feitas na aula de provas por indução!

Manipulação de Somatórios

Podemos substituir o intervalo definido para o índice do somatório, desde que façamos ajustes no somatório:

Substituindo k por $i = k + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1}$$

Manipulação de Somatórios

Pode-se colocar constantes em evidência:

$$\sum_{k=1}^{n} c(k+5) = c(1+5) + c(2+5) + c(3+5) + \ldots + c(n+5) =$$

$$= c[(1+5) + (2+5) + (3+5) + \ldots + (n+5)] = c\sum_{k=1}^{n}(k+5)$$

De forma geral,

$$\sum_{k=m}^{n} ca_k = c\sum_{k=m}^{n} a_k$$

Manipulação de Somatórios

Um somatório de somas pode ser substituído por uma soma de somatórios:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

De forma geral,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

Manipulação de Somatórios

Analogamente, para subtração de somas temos:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Somatórios Múltiplos

Os termos de um somatório podem estar em função de mais de um índice do somatório:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i,j)$$

$$= f(1,5) + f(1,6) + f(1,7) + f(1,8)$$

$$= f(2,5) + f(2,6) + f(2,7) + f(2,8)$$

$$= f(3,5) + f(3,6) + f(3,7) + f(3,8)$$

Somatórios Múltiplos

Pode-se escrever:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i,j) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=5}^{8} f(i,j)$$

Somatórios Múltiplos

Observe:

$$= f(1,5) + f(1,6) + f(1,7) + f(1,8)$$

$$+ f(2,5) + f(2,6) + f(2,7) + f(2,8)$$

$$+ f(3,5) + f(3,6) + f(3,7) + f(3,8)$$

$$= f(1,5) + f(2,5) + f(3,5) + f(1,6) + f(2,6) + f(3,6)$$

$$+ f(1,7) + f(2,7) + f(3,7) + f(1,8) + f(2,8) + f(3,8)$$

Somatórios Múltiplos

Portanto,

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i,j) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=5}^{8} f(i,j) = \sum_{j=5}^{8} \sum_{i=1}^{3} f(i,j)$$

Mudança de Ordem dos Somatórios

Há casos em que um dos índices do somatório depende do outro:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$$

$$\begin{aligned}
= a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + \ldots + a_{1,n} \\
+ a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + \ldots + a_{2,n} \\
+ a_{3,3} + a_{3,4} + \ldots + a_{3,n} + \ldots \\
+ a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n} \\
+ a_{n,n}
\end{aligned}$$

Mudança de Ordem dos Somatórios

Nesses casos, pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

$$\begin{aligned}
= a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + \ldots + a_{1,n} \\
+ a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + \ldots + a_{2,n} \\
+ a_{3,3} + a_{3,4} + \ldots + a_{3,n} + \ldots \\
+ a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n} \\
+ a_{n,n}
\end{aligned}$$

Distributividade dos Somatórios

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} g(j)\right)$$

$$= [f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)]\,[g(1) + g(2) + \ldots + g(m)]$$

$$= f(1)g(1) + f(1)g(2) + \ldots + f(1)g(m)$$

$$+f(2)g(1) + f(2)g(2) + \ldots + f(2)g(m)$$

$$+f(3)g(1) + f(3)g(2) + \ldots + f(3)g(m) + \ldots$$

$$+f(n)g(1) + f(n)g(2) + \ldots + f(n)g(m)$$

Distributividade dos Somatórios

Observe que

$$f(1)g(1) + f(1)g(2) + \ldots + f(1)g(m)$$

$$+f(2)g(1) + f(2)g(2) + \ldots + f(2)g(m)$$

$$+f(3)g(1) + f(3)g(2) + \ldots + f(3)g(m) + \ldots$$

$$+f(n)g(1) + f(n)g(2) + \ldots + f(n)g(m)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} f(i)g(j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(i)g(j)$$

Exercícios

1. $\sum_{i=23}^{47} 1$

2. $\sum_{j=1}^{57} j$

3. $\sum_{k=0}^{50} (3+k)$

4. $\sum_{x=1}^{200} \frac{(x-100)}{2}$

5. $\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=2}^{5} (2i+j)$

Referências

Anamaria GOMIDE e Jorge STOLFI. **Elementos da Matemática Discreta para Computação**. disponível em Elementos da Matemática Discreta para Computação.

Judith L. GERSTING. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**, 5ª ed., 2004.