# Teoria dos Grafos
# Aula 3 - Planaridade

Profa. Sheila Morais de Almeida
Mayara Omai

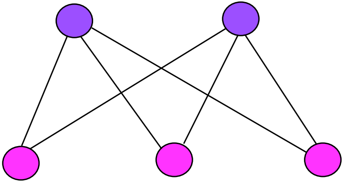
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Ponta Grossa

2018

# Grafos Planares: Preliminares

## Grafo Bipartido Completo

Um grafo **bipartido completo**, denotado por $K_{n,m}$ é um grafo bipartido com partição $[X, Y]$, onde $|X| = n$ e $|Y| = m$, e cada vértice de $X$ é adjacente a todos os vértices de $Y$.

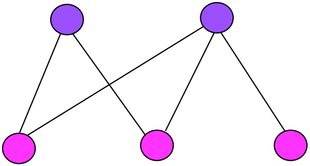


$K_{2,3}$

# Grafos Planares

## Grafo Planar

Um **grafo planar** é um grafo que pode ser desenhado no plano sem quaisquer arestas se cruzando. Tal desenho é chamado de **representação planar**.

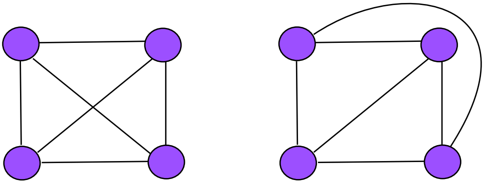


Este grafo é planar?

# Grafos Planares

## Grafo Planar

Um **grafo planar** é um grafo que pode ser desenhado no plano sem quaisquer arestas se cruzando. Tal desenho é chamado de **representação planar**.



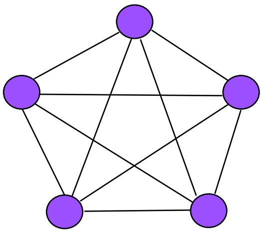
$K_4$ é planar.

# Grafos Planares

## Grafo Planar

Um **grafo planar** é um grafo que pode ser desenhado no plano sem quaisquer arestas se cruzando. Tal desenho é chamado de **representação planar**.

Tente desenhar o grafo completo com 5 vértices, $K_5$, no plano!



# Grafos Planares

João, Pedro e Antônio moram na mesma rua e desejamos levar redes de serviços (água, luz e internet) até suas casas.

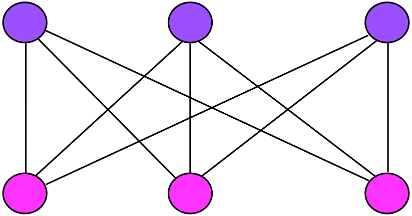
O custo da instalação dessas redes é menor se não precisarmos passar os dutos um por baixo do outro.
(Passar um duto por baixo do doutro implica em cavar mais fundo para a instalação e por isso fica mais caro.)

# Grafos Planares

Existe maneira de levar as redes de água, luz e internet de fibra ótica para João, Pedro e Antônio sem que os dutos se cruzem?

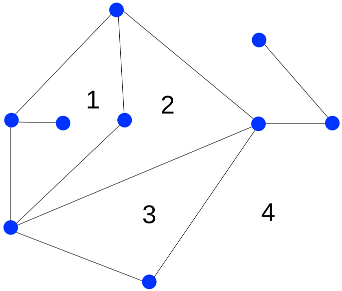
# Grafos Planares

Reformulando a pergunta: o grafo $K_{3,3}$ é planar?



# Grafos Planares

Um grafo simples, conexo e planar, quando imerso no plano divide o mesmo em um número de regiões, incluindo as regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior. Essas regiões são também chamadas de faces.

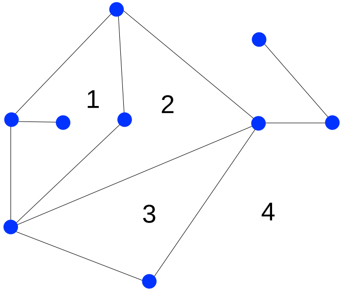



Grafo com 4 faces.

# Grafos Planares

**Século dezoito, Leonhard Euler**
Euler observou uma relação entre o número de vértices ($n$), o número de arestas ($m$) e o número de faces ($f$) de um grafo conexo imerso no plano:

**Fórmula de Euler:** $n - m + f = 2$.




$$n - m + f = 9 - 11 + 4 = 2$$

**Prova da Fórmula de Euler**

A prova é por indução em $m$, o número de arestas.

**Base:** Quando $m = 0$, o grafo consiste em um único vértice.

A única face é a externa.

Neste caso, $n = 1$, $m = 0$ e $f = l$.

$n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$. Então, a Fórmula de Euler é válida neste caso.

# Grafos Planares

**Hipótese de indução:** Assuma que a Fórmula de Euler é verdade para a representação planar de qualquer grafo conexo, planar e simples com $k$ arestas.

**Passo:** Considere um grafo $G$ planar e conexo com $k+1$ arestas.

Há dois casos:

**Caso 1:** O grafo tem um vértice de grau 1.

Excluímos temporariamente este vértice e a aresta que o conecta; o novo grafo $H$ é conexo, planar e simples com $k$ arestas.

Suponha que $H$ tem $n$ vértices e $f$ faces.

Pela hipótese de indução, $n - k + f = 2$.

# Grafos Planares

Como $G$ tem um vértice a mais que $H$, o número de vértices de $G$ é $n+1$.

Como $G$ tem uma aresta a mais que $H$, o número de arestas de $G$ é $k+1$.

Como o vértice removido de $G$ tem grau 1, então o número de faces de $G$ e $H$ é igual. Então, $G$ tem $f$ faces.

Logo, a Fórmula de Euler para $G$ é: $(n+1)-(k+1)+f = n-k+f$, que pela hipótese de indução, vale 2.

# Grafos Planares

**Caso 2:** O grafo $G$ não tem vértices de grau 1.

Então apagamos, temporariamente, uma aresta que separa duas faces.

(Se nenhuma aresta delimita uma face, então o grafo é uma árvore e tem um vértice de grau 1.)

A eliminação da aresta cria um grafo $G'$ conexo, planar e simples com $k$ arestas, $n$ vértices e $f$ faces.

Pela hipótese de indução, $n - k + f = 2$.

# Grafos Planares

No grafo original, $G$, existe uma aresta e uma face a mais, e o mesmo número de vértices.

Fórmula de Euler em $G$: $n - (k + 1) + (f + 1) = n - k + f$, que pela hipótese de indução é igual a 2.

$\square$

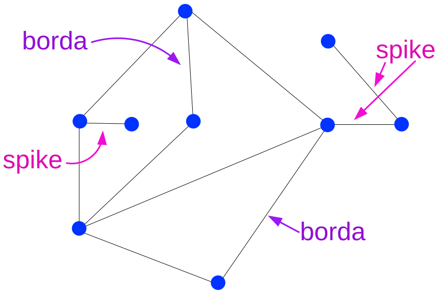
# Grafos Planares

## Borda

Uma **borda** é uma aresta que separa duas faces.

## Spike

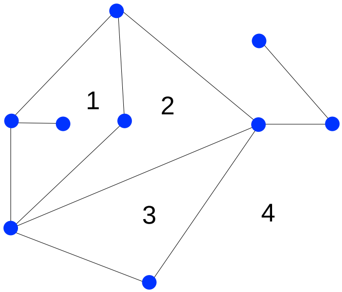
Uma **spike** é uma aresta que não separa duas faces.



# Grafos Planares

## Grau da Face

O **grau de uma face** é a soma das bordas da face mais os spikes contados duas vezes.




Na face 2, o grau é 4. Na face 1, o grau é 6.
Na face externa, o grau é 9.

# Grafos Planares

Se $G$ for um grafo simples, conexo e planar, com pelo menos três vértices e com $m$ arestas.

**Observação 1:** A soma dos graus das faces é $2m$.

**Observação 2:** Não há faces com apenas uma borda, porque não há laços no grafo.

**Observação 3:** Não há faces com exatamente duas bordas porque não há arestas paralelas.

Portanto, cada região tem pelo menos três arestas de borda, de forma que $3f$ é o número mínimo de bordas.

# Grafos Planares

Pelas observações, conclui-se:

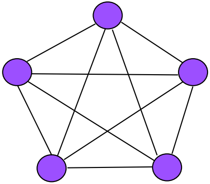
$2m \geq 3f$

Da Fórmula de Euler: $f = 2 - n + m$. Então:

$2m \geq 3(2 - n + m) = 6 - 3n + 3m$.

Portanto, $m \leq 3n - 6$.

# Grafos Planares



O grafo $K_5$ tem 10 arestas, 5 vértices e é conexo.

Então, se o $K_5$ for planar, é verdade que $m \leq 3n - 6$.

No $K_5$, $10 \geq 3(5) - 6 = 9$ é falso!.

Então $K_5$ não é planar.

# Grafos Planares

**Observação 4:** Se $G$ é conexo, planar, tem pelo menos 3 vértices e não tem ciclos de comprimento 3, então cada região terá pelo menos quatro arestas de borda.

Então a soma dos graus das faces é pelo menos $4f$.

Então, $2m \geq 4f$.

Usando a Fórmula de Euler: $2m \geq 4(2 - n + m) = 8 - 4n + 4m$.

Portanto, $m \leq 2n - 4$.

# Grafos Planares

O grafo $K_{3,3}$ é conexo, tem pelo menos 3 vértices e não tem ciclos de tamanho 3, pois bipartidos não tem ciclos ímpares.

Então, se o $K_{3,3}$ for planar, ele satisfaz a desigualdade: $m \leq 2n - 4$.

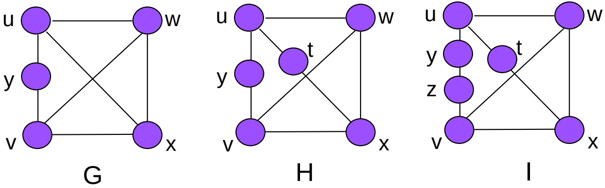
O $K_{3,3}$ tem 9 arestas e 6 vértices, então $9 \leq 2(6) - 4 = 8$, falso!

Portanto $K_{3,3}$ não é planar.

# Grafos Planares

## Grafos Homeormorfos (Minor)

Dois grafos são **homeomorfos** se ambos puderem ser obtidos do mesmo grafo por uma sequência de subdivisões das arestas, nas quais uma única aresta *uv* é substituída por duas novas arestas *uy* e *yv* que se conectam a um novo vértice *y*.




Grafos homeomorfos.

# Grafos Planares

**Teorema de Kuratowski**

Um grafo é não-planar se, e somente se, contém um subgrafo homeomorfo a $K_5$ ou $K_{3,3}$.

# Grafos Planares

Para mostrar que um grafo é planar, basta desenhá-lo no plano sem intersecção de arestas.

Por outro lado, para mostrar que um grafo não é planar, basta mostrar que o grafo possui um subgrafo homeomorfo ao $K_5$ ou ao $K_{3,3}$.

# Grafos Planares

**Desafio:** Este grafo é planar?