Teoria dos Grafos
Aula 1 - Introdução

Profa. Sheila Morais de Almeida
Mayara Omai

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Ponta Grossa

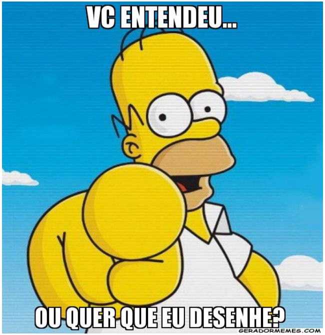
2018

Introdução

Quatro alunos P1, P2, P3 e P4, desejam utilizar o computador para realizar seus trabalhos. No laboratório existem quatro computadores M1, M2, M3 e M4. Entretanto, os programas instalados em cada computador são diferentes e os alunos não possuem permissão para instalar novos programas. O aluno P1 precisa de um programa que está instalado em M1 e M4. O aluno P2 precisa de um programa que está instalado em M2 e M3. O aluno P3 precisa de um programa que está instalado em M1 e M4. O aluno P4 precisa de um programa que está instalado em M3 e M4.

Como podemos alocar cada aluno em um computador, de forma que todos tenham suas necessidades atendidas?

Introdução

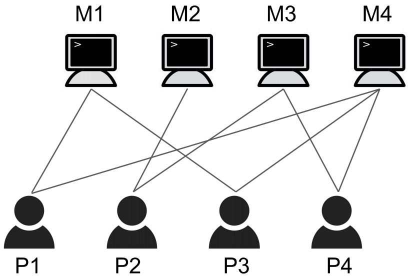


Em outras palavras..

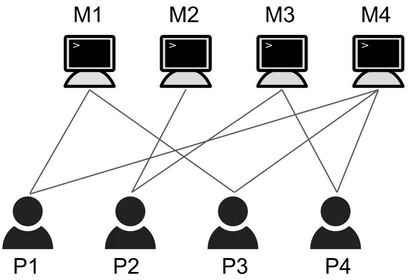
Em algumas situações, figuras valem mais que mil palavras!

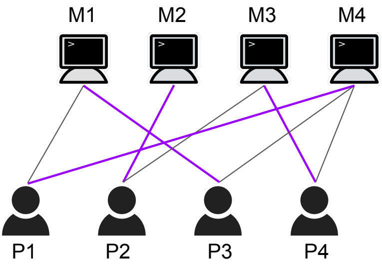
Exemplo

- P1 precisa de um programa que está instalado em M1 e M4;
- P2 precisa de um programa que está instalado em M2 e M3;
- P3 precisa de um programa que está instalado em M1 e M4; e
- P4 precisa de um programa que está instalado em M3 e M4.



Exemplo



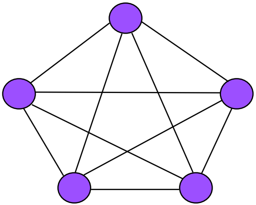


Exemplo

Definição informal

Um grafo é composto por:

- um conjunto de pontos (vértices),
- um conjunto de linhas que ligam os pontos (arestas).

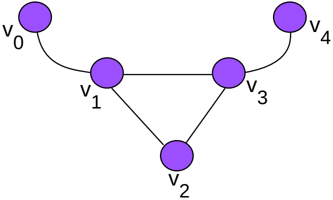


O que é um grafo?

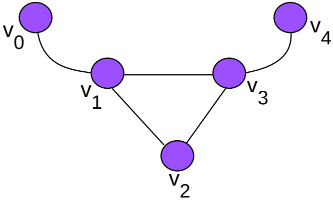
Definição formal

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura matemática composta por dois conjuntos:

- $V(G)$, um conjunto de elementos que são chamados de vértices,
- $E(G)$, um conjunto de pares de elementos de $V(G)$, cada par é chamado de aresta.



O que é um grafo?



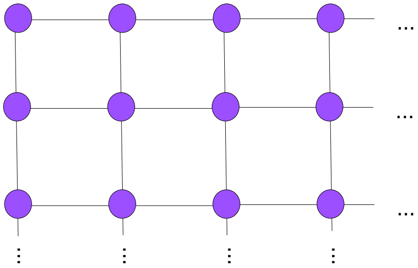
$G = (V(G), E(G))$, onde:

- $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- e $E(G) = \{v_0v_1, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4\}$.

O que é um grafo?

O conjunto dos vértices pode ser infinito. Nesse caso o grafo é chamado de **grafo infinito**.

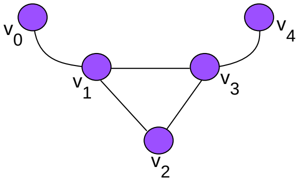
Exemplo: $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G) = \{ij : i, j \in \mathbb{Z}\}$ e $E(G) = \{(ij, i(j+1)) : i, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{(ij, (i+1)j) : i, j \in \mathbb{Z}\}$.



Conceitos básicos

Dois vértices conectados por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**.

Uma aresta vw é dita **incidente** em v e em w.

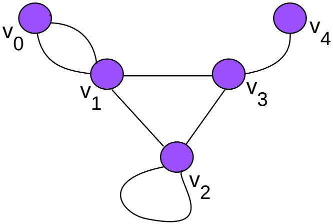


Os vértices v_1 e v_3 são vizinhos (ou adjacentes) e a aresta $v_1 v_3$ é incidente nos vértices v_1 e v_3.

Conceitos básicos

Arestas múltiplas: mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices.

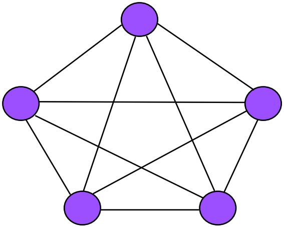
Laço: aresta definida por um par de vértices não distintos.



A aresta v_2v_2 é um laço e entre os vértices v_0 e v_1 temos arestas múltiplas.

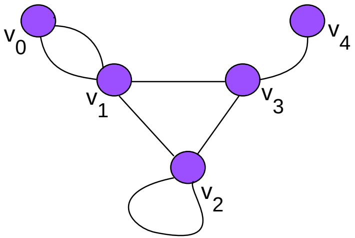
Conceitos básicos

Um grafo é **simples** se não possui laços ou arestas múltiplas.



Conceitos básicos

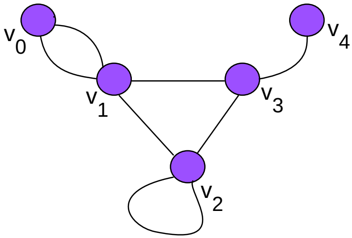
O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes nele.
(Quando há laço, a aresta deve ser contada duas vezes.)



$$d(v_0) = 2 \qquad d(v_1) = 4 \qquad d(v_2) = 4$$
$$d(v_3) = 3 \qquad d(v_4) = 1$$

Conceitos básicos

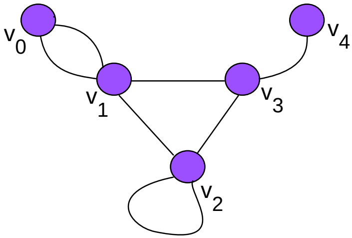
O **grau máximo** do grafo é o maior dos graus dos vértices e é denotado por $\Delta(G)$.



$$\Delta(G) = 4.$$

Conceitos básicos

O **grau mínimo** do grafo é o menor dos graus dos vértices e é denotado por $\delta(G)$.



$$\delta(G) = 1.$$

Conceitos básicos

As relações (arestas) entre os elementos (vértices) de um modelo (grafo) podem não ser simétricas.

Exemplos de relações que não são simétricas:

- mapa rodoviário (tem vias com sentido único);
- relação de conhecer um indíviduo (artistas são bastante conhecidos, mas não conhecem todo mundo);
- relação de ser chefe (é uma hierarquia, em geral, alguém é mandado e não é chefe de ningúem).

Conceitos Básicos

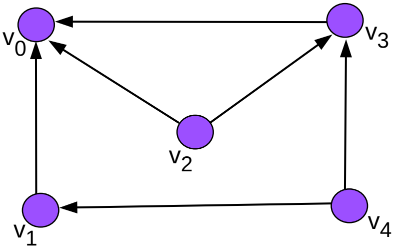
Para representar relações assimétricas, as arestas são **pares ordenados** de vértices.

A ordem dos vértices de uma aresta orientada (a, b) indica que o sentido da relação é de a para b.

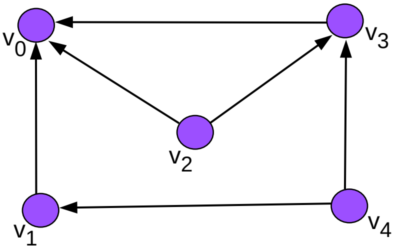
Uma aresta orientada também é chamada na literatura de **arco**.

Conceitos Básicos

Um grafo com orientação nas arestas é chamado de **grafo orientado** ou **digrafo** ou **grafo direcionado**.



Conceitos básicos



$G = (V(G), E(G))$

$V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$

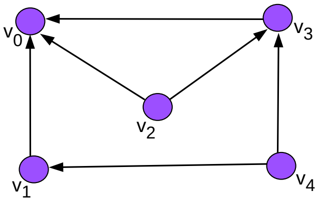
$E(G) = \{(v_1, v_0), (v_2, v_0), (v_2, v_3), (v_3, v_0), (v_4, v_1), (v_4, v_3)\}$

Conceitos Básicos

O conceito de grau é diferente em grafos orientados.

O **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que chegam em v e é denotado por $d^{-}(v)$.

O **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem de v em direção a outros vértices, denotado por $d^{+}(v)$.

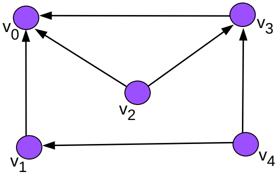


Conceitos básicos

Definição

O **grau de entrada** de um vértice v é o número de arestas que chegam em v, denotado por $d^{-}(v)$.

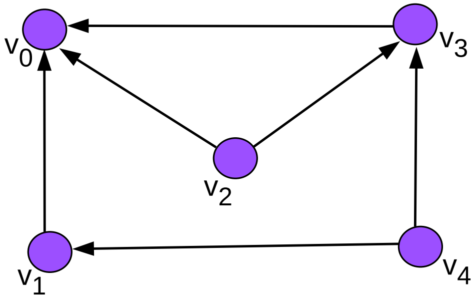
O **grau de saída** de v é o número de arestas que saem de v, denotado por $d^{+}(v)$.



$d^{+}(v_0) = ?$ $d^{+}(v_1) = ?$ $d^{+}(v_2) = ?$ $d^{+}(v_3) = ?$ $d^{+}(v_4) = ?$

$d^{-}(v_0) = ?$ $d^{-}(v_1) = ?$ $d^{-}(v_2) = ?$ $d^{-}(v_3) = ?$ $d^{-}(v_4) = ?$

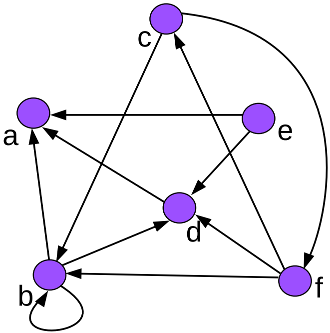
Conceitos Básicos



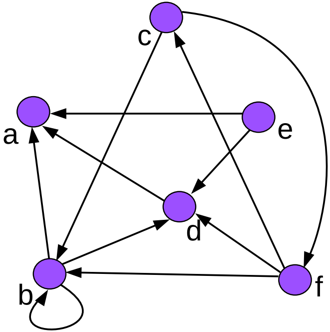
$d^+(v_0) = 0$ $d^+(v_1) = 1$ $d^+(v_2) = 2$ $d^+(v_3) = 1$ $d^+(v_4) = 2$

$d^-(v_0) = 3$ $d^-(v_1) = 1$ $d^-(v_2) = 0$ $d^-(v_3) = 2$ $d^-(v_4) = 0$

Conceitos Básicos



Conceitos Básicos

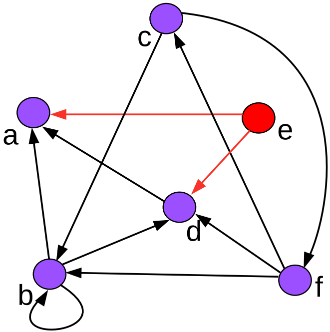


$d^+(a) = 0$ $d^+(b) = 3$ $d^+(c) = 1$ $d^+(e) = 2$ $d^+(f) = 3$

$d^-(a) = 3$ $d^-(b) = 3$ $d^-(c) = 1$ $d^-(e) = 0$ $d^-(f) = 1$

Conceitos Básicos

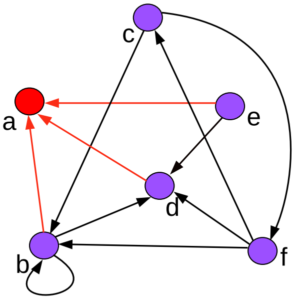
Um vértice com grau de entrada igual a zero é chamado de **fonte**.



Nesse exemplo, *e* é uma fonte.

Conceitos Básicos

Um vértice com grau de saída igual a zero é chamado de **sumidouro** ou **sorvedouro**.



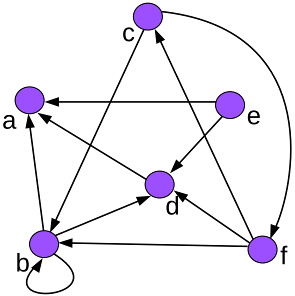
Nesse exemplo, *a* é um sumidouro.

Conceitos básicos

Definição

Um vértice v é **fonte** quando $d^{-}(v) = 0$. Exemplo: v_1 é fonte.

Um vértice v é **sorvedouro** quando $d^{+}(v) = 0$. Exemplo: v_4 é sorvedouro.



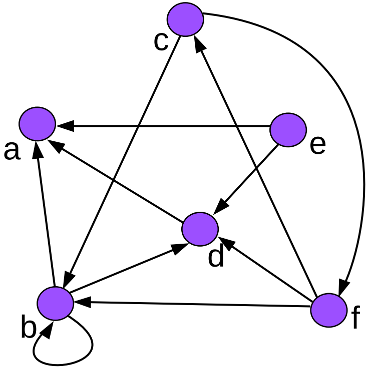
Conceitos Básicos

Para representar relações assimétricas, as arestas são **pares ordenados** de vértices.

A ordem dos vértices de uma aresta orientada (a, b) indica que o sentido da relação é de a para b.

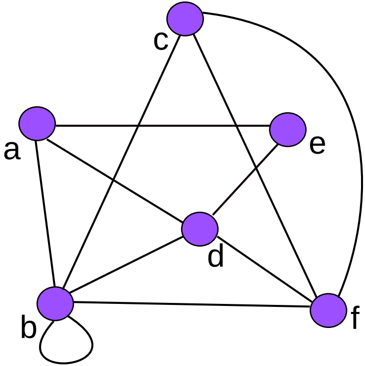
Uma aresta orientada também é chamada na literatura de **arco**.

Conceitos Básicos



Conceitos Básicos

O **grafo subjacente** de um grafo orientado G é o grafo obtido ao se remover a orientação das arestas de G.



Conceitos básicos

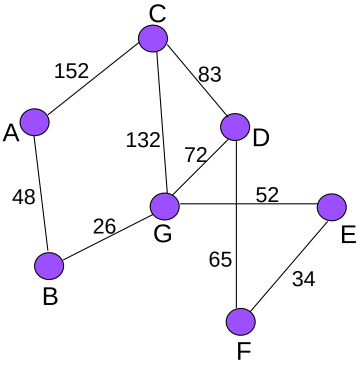
Em alguns casos, é necessário atribuir um custo para o vértice, ou para a aresta ou para ambos.

Por exemplo, podemos querer representar quantos quilômetros de rodovia existem entre quaisquer duas cidades de um mapa rodoviário.

Grafos com valores nos vértices, arestas ou ambos são **grafos ponderados**.

Conceitos básicos

Exemplo de grafo ponderado.

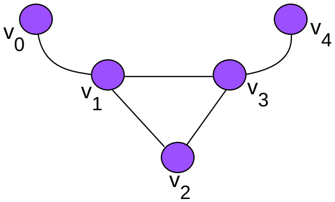


Representação de grafos

As formas mais comuns de representação de grafos são:

- **matriz de adjacências:** uma matriz $M_{|V(G)| \times |V(G)|}$, onde $m_{i,j} = 1$ se existe aresta entre $v_i v_j$ e $m_{i,j} = 0$ caso contrário.
- **matriz de incidência:** uma matriz $M_{|V(G)| \times |E(G)|}$, onde $m_{i,j} = 1$ se v_i é um dos vértices da aresta e_j. (dizemos que a aresta e_j incide no vértice v_i)

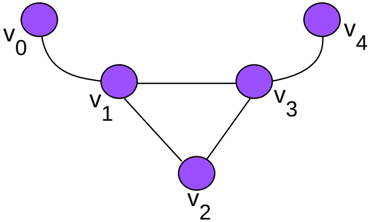
Representação de grafos



Matriz de adjacências:

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0					
v_1					
v_2					
v_3					
v_4					

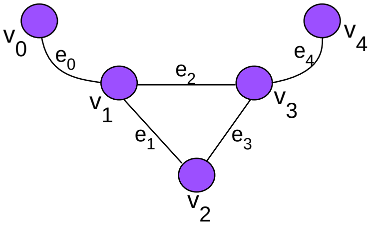
Representação de grafos



Matriz de adjacências:

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	1	0	0	0
v_1	1	0	1	1	0
v_2	0	1	0	1	0
v_3	0	1	1	0	1
v_4	0	0	0	1	0

Representação de grafos



Matriz de incidência:

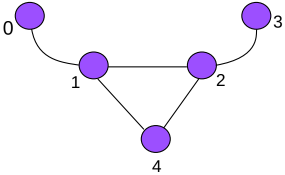
	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4
v_0	1	0	0	0	0
v_1	1	1	1	0	0
v_2	0	1	0	1	0
v_3	0	0	1	1	1
v_4	0	0	0	0	1
v_5	0	0	0	0	0

Representação de grafos

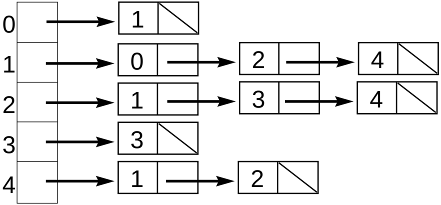
Computacionalmente, além da representação através de matrizes, o grafo pode ser representado por uma *lista de adjacências*.

A estrutura de dados utilizada é um vetor com $|V(G)|$ posições, onde a posição i contém o endereço de uma lista ligada onde cada elemento é um vizinho do vértice i.

Representação de grafos

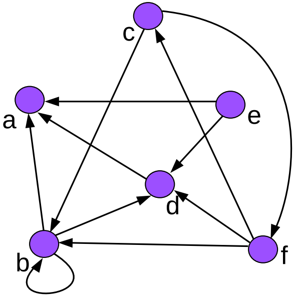


Lista de adjacências:



Representação de Grafos

Rotulação dos vértices para representação computacional:



Representação de Grafos

A matriz de adjacências de um grafo orientado não é necessariamente simétrica.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
a	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0
c	0	1	0	0	0	1
d	1	0	0	0	0	0
e	1	0	0	1	0	0
f	0	1	1	1	0	0