Indução Matemática

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

GERSTING, Judith L.,*Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics, 6th ed., 2007.*

MAMBER, Udi, Introduction to Algorithms: a Creative Approach, 1st ed., 1989.

ROSEN, Kenneth H., *Discrete Mathematics and its applications, 6th ed., 2007.*

Indução Estrutural

Às vezes, a propriedade que queremos provar é definida estruturalmente e não algebricamente.

Por exemplo, pode ser uma propriedade do plano, de figuras geométricas, de uma estrutura de dados (como árvores), ou de um grafo.

Neste caso, a indução se aplica. Devemos:

Etapas da indução estrutural

1. Provar $P(T_0)$, para todas as estruturas minimais T_0.
2. Mostrar que $P(T) \to P(T')$, onde T' é uma estrutura que contém propriamente T.

Etapas da Indução Estrutural

1. Provar $P(T_0)$, para todas as estruturas minimais T_0.

   Ou seja, para toda estrutura T_0 tão pequena que não contém em si um subconjunto menor com a mesma estrutura.

2. Mostrar que $P(T) \rightarrow P(T')$, onde T' é uma estrutura que contém propriamente T.

   No passo, Consideramos a estrutura T', removemos seus elementos para obter T. Mostramos que já que a propriedade vale para T pela hipótese, então podemos estender para os demais elementos de T'.

Passos para uma prova por indução estrutural

1. **Base:** provar que vale para estruturas minimais.

2. **Hipótese de indução:** considerar que o enunciado é verdadeiro para uma estrutura T.

3. **Passo da indução:** provar que quando o enunciado é verdade para T, ele também é verdade para estruturas T' que contém propriamente T.

   Considere T', remova elementos para obter T. Por hipótese, a propriedade vale para T. Mostre que é possível estendê-la para T'.

Exemplo 1

Conjectura: Em uma cerca com n estacas existem $n-1$ seções, para n inteiro, $n \geq 1$.

Exemplo 1

Conjectura: Em uma cerca com n estacas existem $n-1$ seções, para n inteiro, $n \geq 1$.

Base: Suponha que a cerca tem 1 estaca $(n = 1)$.

Não há seções.

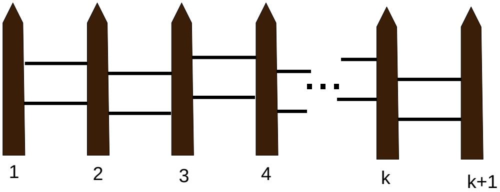
Coincide com o enunciado que diz que há $n - 1 = 1 - 1 = 0$ seções.

Exemplo 1

Conjectura: Em uma cerca com n estacas existem $n-1$ seções, para n inteiro, $n \geq 1$.

Hipótese de indução: Se a cerca tem k estacas, k inteiro positivo, então a cerca tem $k-1$ seções.

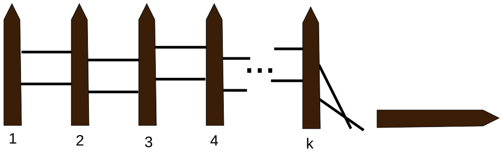
Passo: Considere uma cerca com $k+1$ estacas.



Exemplo 1

Conjectura: Em uma cerca com n estacas existem $n-1$ seções, para n inteiro, $n \geq 1$.

Remova a última estaca da cerca.



Observe que a cerca que restou tem k estacas e uma seção a menos.

Pela hipótese de indução, a cerca com k estacas tem $k-1$ seções.

Então a cerca antes de removermos a estaca tinha k seções. $\square$

Exemplo 2

Conjectura: Se S é um conjunto finito com n elementos, $n \in \mathbb{N}$, então S tem 2^n subconjuntos.

Base: Quando $n = 0$, $S = \{\}$.

Subconjuntos de S: $\{\}$.

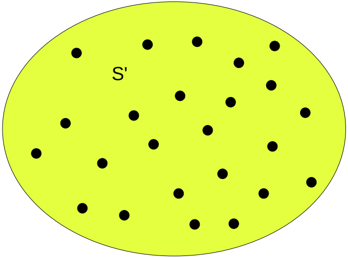
Pelo enunciado, S tem $2^0 = 1$ subconjunto. A fórmula é condizente com o que verificamos. Portanto, o enunciado está correto quando $n = 0$.

Exemplo 2

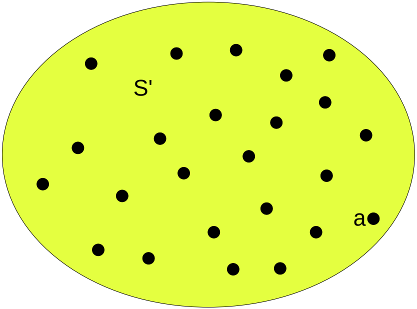
Conjectura: Se S é um conjunto finito com n elementos, $n \in \mathbb{N}$, então S tem 2^n subconjuntos.

Hipótese de Indução: Suponha que S é um conjunto com k elementos, $k \in \mathbb{N}$, então S tem 2^k subconjuntos.

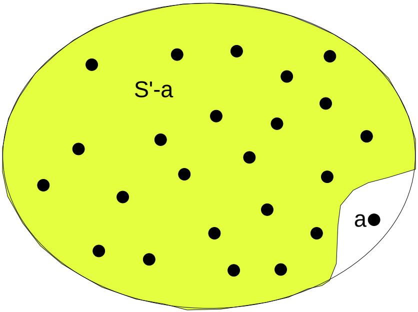
Passo: Considere um conjunto S' com $k+1$ elementos.



Seja a um dos elementos em S'. Sabemos que a existe, pois S' tem $k+1$ elementos e $k \in \mathbb{N}$.

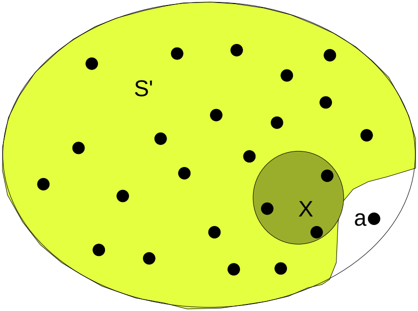


O conjunto $S' - a$ tem k elementos. Pela hipótese de indução, $S' - a$ tem 2^k subconjuntos.

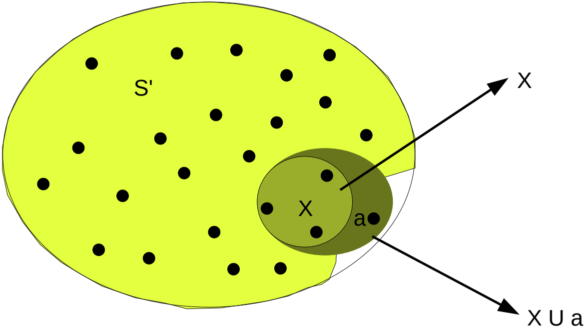


Cada subconjunto $X \subseteq S' - a$ é um subconjunto de S',

.



Cada subconjunto $X \subseteq S' - a$ é um subconjunto de S', assim como o subconjunto $X \cup \{a\}$.



Cada subconjunto $X \subseteq S' - a$ é um subconjunto de S', assim como o subconjunto $X \cup \{a\}$.

Então, S' tem o dobro do número de subconjuntos de $S' - a$.

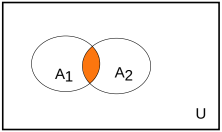
Portanto, S' tem $2(2^k)$ subconjuntos, isto é, 2^{k+1} subcojuntos.

Como essa quantidade de subconjuntos corresponde ao valor que se obtém ao aplicar a fórmula do enunciado para $n = k + 1$, então a fórmula está correta. $\square$

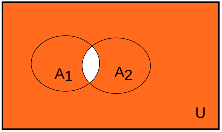
Exemplo 3

Conjectura: $\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$, sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem subconjuntos de um universo U, com $n \geq 2$.

Base: $n = 2$



$A_1 \cap A_2$

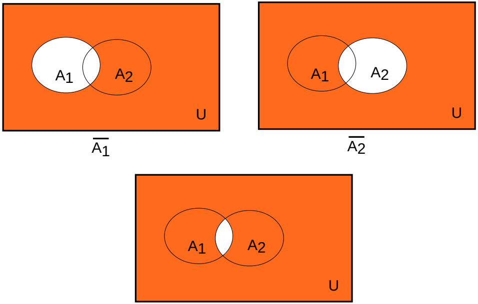


$\overline{A_1 \cap A_2}$

Exemplo 3

Conjectura: $\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$, sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem subconjuntos de um universo U, com $n \geq 2$.

Base: $n = 2$



$\overline{A_1}$ $\overline{A_2}$

$\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$

Exemplo 3

Conjectura: $\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$, sempre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem subconjuntos de um universo U, com $n \geq 2$.

Hipótese de indução: $\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}$, onde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são subconjuntos de um universo U, com $k \geq 2$.

Passo: Vamos provar que $\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j \bigcap A_{k+1}}$.

Passo: Vamos provar que $\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j \bigcap A_{k+1}}$.

Observe que $\bigcap_{j=1}^{k} A_j$ é **um** conjunto e A_{k+1} é **um** conjunto. Como está provado na base que $\overline{\bigcap_{j=1}^{2} A_j} = \bigcup_{j=1}^{2} \overline{A_j}$, tem-se:

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j \bigcap A_{k+1}} = \overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} \bigcup \overline{A_{k+1}}$$

Pela hipótese de indução, $\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}$, portanto:

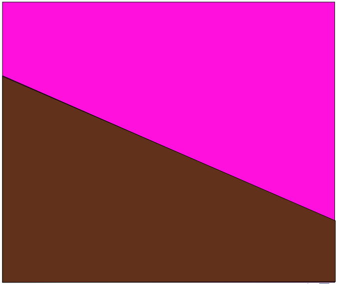
$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} \bigcup \overline{A_{k+1}} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j} \bigcup \overline{A_{k+1}} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j}. \qquad \square$$

Exemplo 4

Conjectura: É possível colorir as regiões formadas por qualquer quantidade de retas no plano utilizando 2 cores sem que regiões vizinhas tenham a mesma cor.

A prova é por indução no número de retas.

Base: quando $n = 1$, duas cores são necessárias e suficientes.



Exemplo 4

Conjectura: É possível colorir as regiões formadas por qualquer quantidade de retas no plano utilizando 2 cores sem que regiões vizinhas tenham a mesma cor.

Hipótese de indução: É possível colorir as regiões formadas por k retas em um plano utilizando duas cores.

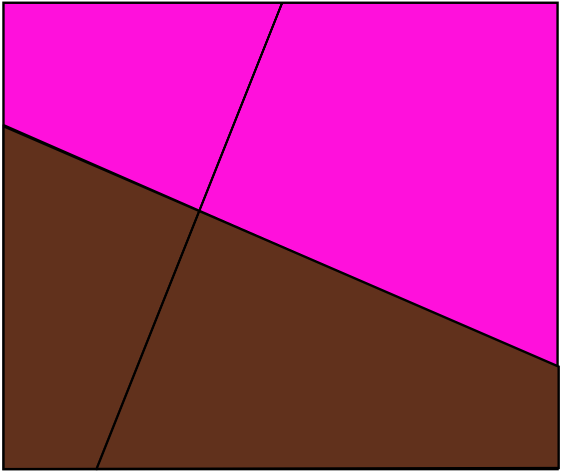
Passo: Considere que a $(k+1)$-ésima reta é adicionada no plano.

Precisamos saber como corrigir a coloração quando uma nova reta é adicionada formando novas regiões.

Separe as regiões em dois grupos de acordo com o lado em que elas estão da reta $(k+1)$.

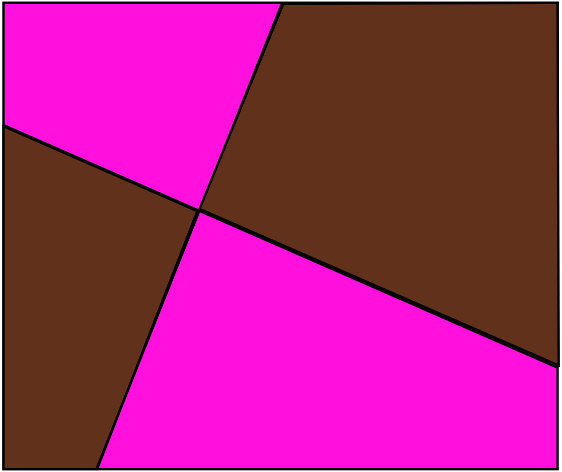
Deixe todas as regiões de um lado com a mesma cor e inverta as cores de todas as regiões do outro lado da reta (k+1).

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



$k = 2$

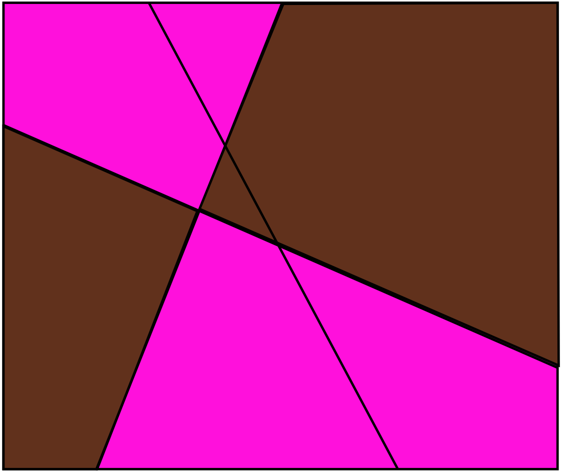
Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



$k = 2$

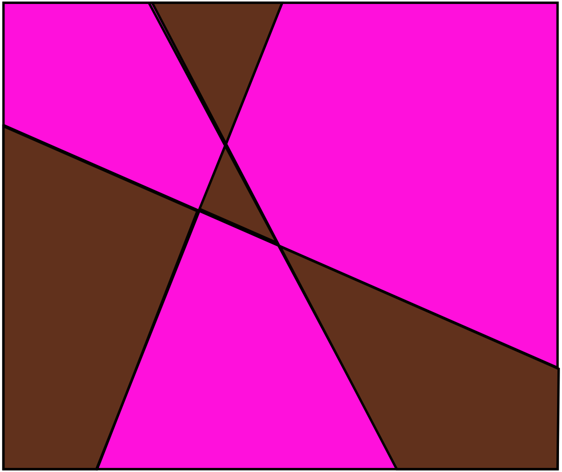
Indução Estrutural - Exemplos

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



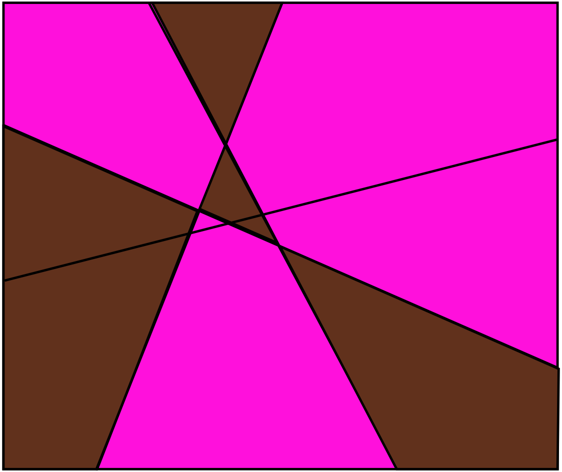
$k = 3$

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



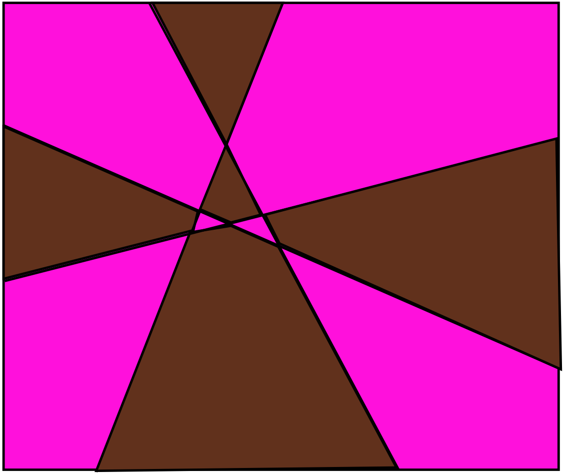
$k = 3$

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



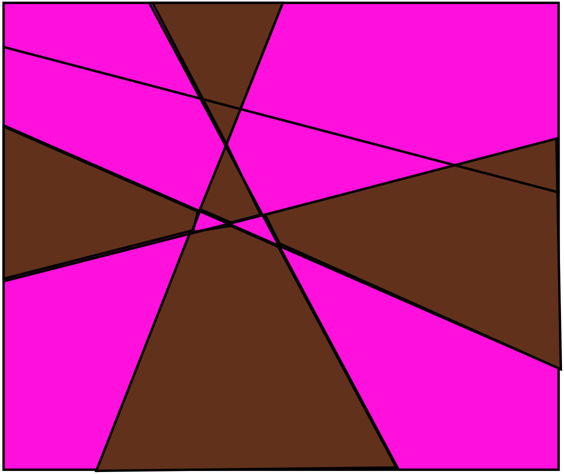
$k = 4$

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



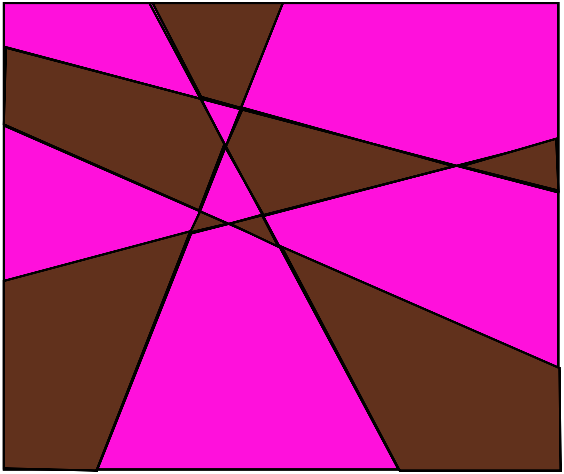
$k = 4$

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



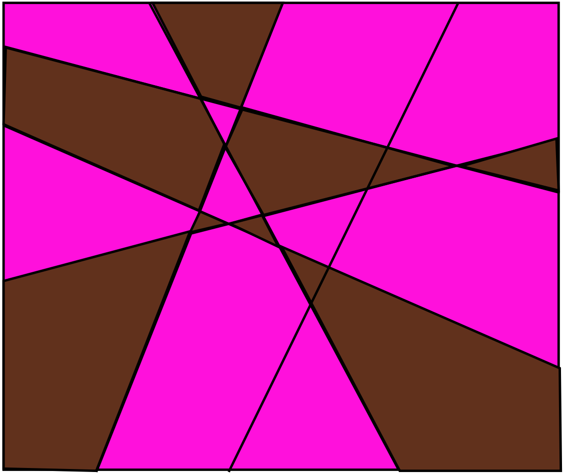
$k = 5$

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



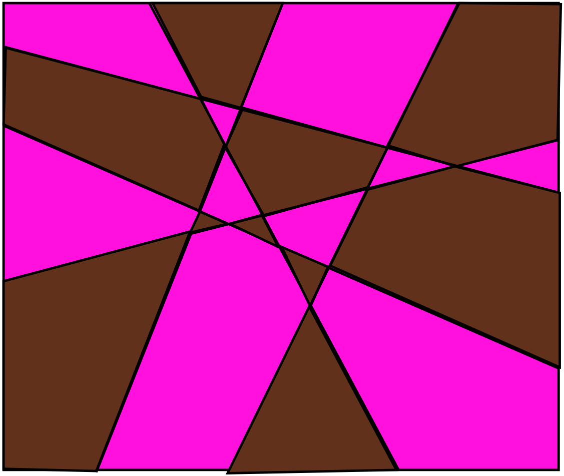
$k = 5$

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



$k = 6$

Vejamos alguns exemplos com valores pequenos de k:



$k = 6$

Temos que provar que essa é uma coloração válida em qualquer caso.

Para tanto, considere duas regiões vizinhas R_1 e R_2. Há dois casos:

Caso 1: R_1 e R_2 estão do mesmo lado da reta $k+1$.

Caso 2: R_1 e R_2 estão em lados diferentes da reta $k+1$.

Caso 1: R_1 e R_2 estão do mesmo lado da reta $k+1$.

Se as regiões R_1 e R_2 estão do lado onde as cores não se alteram:

- Pela hipótese de indução, essa era uma coloração válida antes da inserção da reta $(k+1)$.
- Então as regiões R_1 e R_2 tinham cores diferentes.
- Como as cores não se alteram, R_1 e R_2 continuam tendo cores diferentes.

Se as regiões R_1 e R_2 estão do lado onde as cores se alteram:

- Pela hipótese de indução, essa era uma coloração válida antes da inserção da reta $(k+1)$.
- Então as cores das regiões R_1 e R_2 eram diferentes.
- Como as duas cores foram alteradas, R_1 e R_2 continuam tendo cores diferentes.

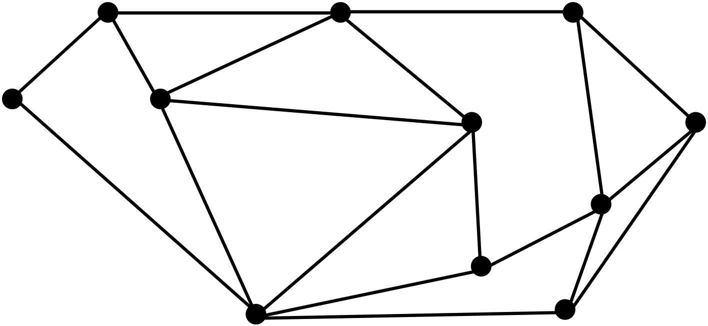
Caso 2: R_1 e R_2 estão em lados opostos da reta $k+1$.

Então R_1 e R_2 eram a mesma região antes da inserção da reta $(k+1)$ e tinham a mesma cor.

Como as regiões de um lado da reta $(k+1)$ continuam com a mesma cor e as regiões do outro lado invertem de cor, R_1 e R_2 tem cores diferentes.

Com $k+1$ retas, as cores de regiões vizinhas são sempre diferentes. Então está provada a indução. $\square$

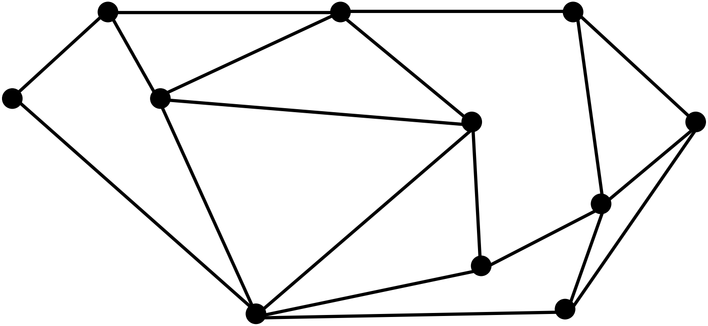
Considere um grafo planar, conexo, com n vértices m arestas e f faces.



Exemplo 5

Teorema de Euler: Os números de vértices (n), arestas (m) e faces (f) em qualquer grafo planar conexo estão relacionados pela fórmula

$$n - m + f = 2.$$



Exemplo 5

Teorema de Euler: Os números de vértices (n), arestas (m) e faces (f) em qualquer grafo planar conexo estão relacionados pela fórmula

$$n - m + f = 2.$$

A prova é por indução no número de faces (f).

Todo grafo que só tem uma face não tem ciclos e, por definição, é uma árvore.

Pergunta: Quantas arestas uma árvore tem?

Exemplo 5

Teorema de Euler: Os números de vértices (n), arestas (m) e faces (f) em qualquer grafo planar conexo estão relacionados pela fórmula

$$n - m + f = 2.$$

Se a Fórmula de Euler estiver correta, a árvore com n vértices tem:

$$n - m + 1 = 2$$

$$m = n - 2 + 1 = n - 1$$

$n - 1$ arestas.

Lema: Uma árvore com n vértices tem $n - 1$ arestas.

Indução Estrutural - Exemplos

Prova do Lema: A prova é por indução em n, o número de vértices da árvore.

Base: $n = 1$

Uma árvore com um único vértice não tem arestas, ou seja, tem $0 = 1 - 1$ arestas.

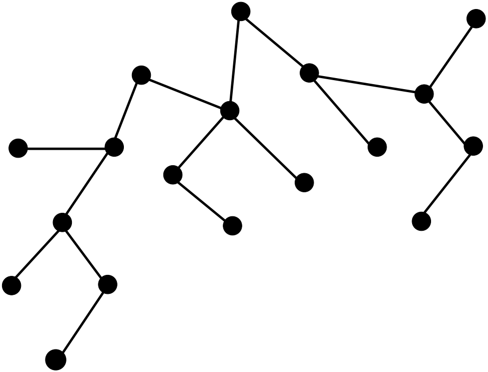
Então, o lema vale no caso $n = 1$.

Hipótese de indução: Uma árvore com k vértices tem $k-1$ arestas, k inteiro positivo.

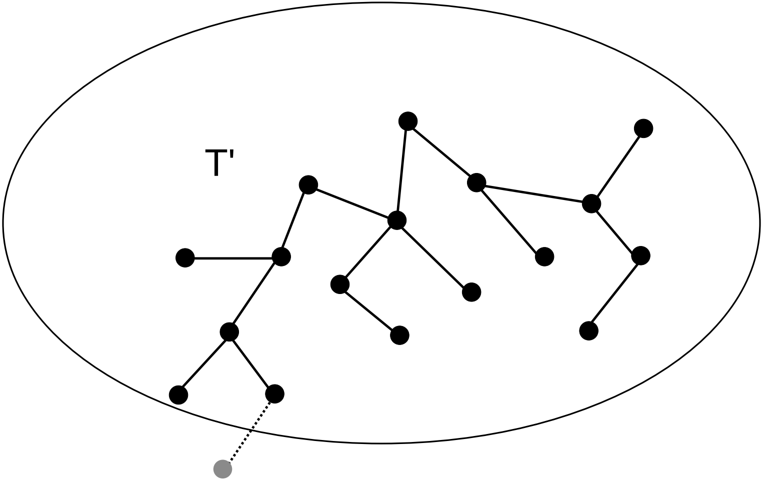
Passo: Considere uma árvore T com $k+1$ vértices, com k inteiro e positivo.

Se $k=1$, o caso já está provado na base. Se $k \geq 2$, então a árvore tem pelo menos um vértice que é folha.

Remova uma folha da árvore T. Vamos chamar de T' a árvore com a folha removida.

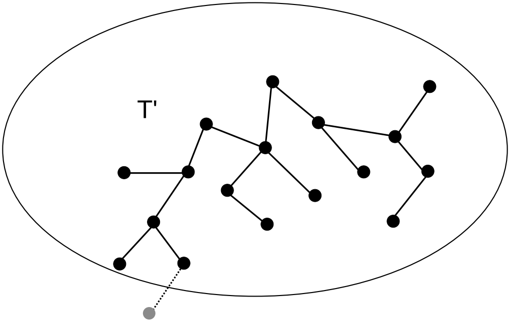


Indução Estrutural - Exemplos



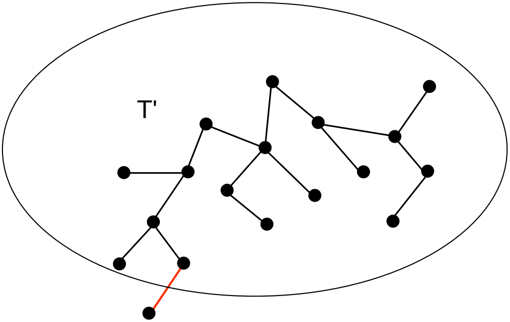
A árvore T' tem k vértices e, por hipótese de indução, tem $k-1$ arestas.

Se reinserirmos a folha removida, inserimos mais uma aresta.



A árvore T' tem k vértices e, por hipótese de indução, tem $k-1$ arestas.

Se reinserirmos a folha removida, inserimos mais uma aresta.



Indução Estrutural - Exemplos

Então a árvore T com $k+1$ vértices possui k arestas. $\square$

Como o lema foi provado, a Fórmula de Euler vale para árvores, ou seja, para os grafos que tem 1 face.

Exemplo 5

Teorema de Euler: Os números de vértices (n), arestas (m) e faces (f) em qualquer grafo planar conexo estão relacionados pela fórmula:

$$n - m + f = 2.$$

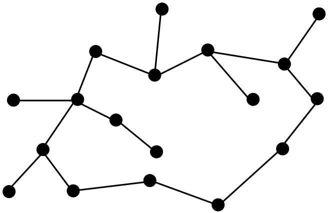
Hipótese de indução: Um grafo planar conexo com k faces, n vértices e m arestas satisfaz a fórmula $n - m + k = 2$, para um k inteiro positivo.

passo: Considere um grafo G planar conexo com $k + 1$ faces. Como k é inteiro e positivo, então G tem pelo menos 2 faces.

Então G não é uma árvore, G tem pelo menos um ciclo.

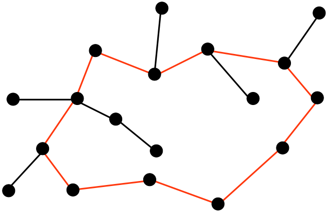
Remova uma aresta de um dos ciclos de G.

Ao remover uma aresta de um ciclo, duas faces se unem. Então o novo grafo tem uma face a menos que G.



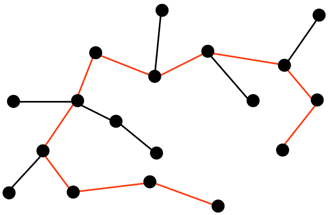
Remova uma aresta de um dos ciclos de G.

Ao remover uma aresta de um ciclo, duas faces se unem. Então o novo grafo tem uma face a menos que G.



Remova uma aresta de um dos ciclos de G.

Ao remover uma aresta de um ciclo, duas faces se unem. Então o novo grafo tem uma face a menos que G.



Então, o novo grafo G', obtido pela remoção de uma aresta de G tem uma face a menos e obedece a regra:

$n - m' + f' = 2$, onde:

- m' é o número de arestas do grafo G'.
- f' é o número de faces do grafo G'.

A diferença do grafo G' para o grafo G é que G' tem uma face e uma aresta a menos.

Como G' tem k faces, vale a hipótese de indução, ou seja, $n' - m' + k = 2$.

Por construção, o número de arestas de G é $m' = m - 1$ e o número de vértices é $n' = n$.

Substituindo esses valores em $n' - m' + k = 2$, temos:

$$n - (m - 1) + k = 2$$

$$n - m + k + 1 = 2$$

$$n - m + f = 2$$

Portanto, a Fórmula de Euler vale para o grafo G. $\square$

Indução Forte

- Indução fraca: primeiro princípio da indução.
- Indução completa (ou forte): segundo princípio da indução.

Indução Forte

Primeiro Princípio da Indução

$P(m)$ é verdade;

Para qualquer $k \geq m$, vale: $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Indução Forte

Segundo Princípio da Indução

$P(m)$ é verdade;

Para qualquer $k \geq m$, vale:
$P(m) \wedge P(m+1) \wedge ... \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Exemplo 6

Conjectura: Em uma escada infinita, se é possível alcançar o primeiro e o segundo degraus e de qualquer degrau alcançar dois degraus acima, então é possível alcançar qualquer degrau.

Base: $n = 1$: pelo enunciado, pode-se alcançar o primeiro degrau.

$n = 2$: pelo enunciado, pode-se alcançar o segundo degrau.

Hipótese de indução (segundo princípio): Pode-se alcançar qualquer degrau de 1 a k.

Passo: Temos que provar que podemos alcançar o degrau $k + 1$.
Pela hipótese, podemos alcançar o degrau $k - 1$. Pelo enunciado, de qualquer degrau, podemos alcançar dois degraus acima. Portanto, podemos alcançar o degrau $k + 1$. $\square$

Exemplo 7

Conjectura: Se n é um número inteiro positivo maior que 1, então n pode ser escrito como o produto de números primos.

Base: $n = 2$ é um número primo.

Hipótese de indução: Qualquer inteiro m, $1 < m \leq k$ pode ser escrito como o produto de números primos.

passo: Seja $n = k + 1$. Se $k + 1$ é primo, então está escrito como produto de primos.

Indução Forte - Exemplos

Se $k + 1$ é composto, então $k + 1 = a \times b$.

Note que a e b são maiores que 1 e no máximo k.

Então, pela hipótese de indução, a pode ser escrito como produto de números primos.

Também pela hipótese de indução, b pode ser escrito como produto de números primos.

Portanto, $k + 1$ é o produto dos primos que compõem a e dos primos que compõe b. $\square$

Indução Forte - Exemplos

Exemplo 8

Conjectura: Uma postagem que custa pelo menos $\$12,00$ sempre pode ser feita utilizando-se selos postais que custam $\$4,00$ e $\$5,00$.

Base: Se o custo da postagem é $\$12$, basta usar 3 selos que custam $\$4,00$.

Se o custo é $\$13,00$, use dois selos de $\$4,00$ e um selo de valor $\$5,00$.

Se o custo é $\$14,00$, use um selo de valor $\$4,00$ e dois selos de $\$5,00$.

Se o custo é $\$15,00$, use três selos de $\$5,00$.

Se o custo da postagem é $\$16,00$, use 4 selos de valor $\$4,00$.

Exemplo 8

Conjectura: Uma postagem que custa pelo menos $\$12,00$ sempre pode ser feita utilizando-se selos postais que custam $\$4,00$ e $\$5,00$.

Hipótese de indução: Uma postagem que custa **até** $\$k$, k inteiro e $k \geq 12$, pode ser feita utilizando-se selos postais que custam $\$4,00$ e $\$5,00$.

Passo: Considere uma postagem com valor $\$k+1$, $k \geq 11$.

Se o valor da postagem $(k+1)$ for até $\$16,00$, está provado pela base. Então, podemos assumir que $k+1 > 16$, ou seja, $k-3 > 12$.

Como $k-3<k$ e $k-3>12$, pela hipótese de indução, a postagem que custa $\$k-3$, pode ser feita com selos que custam $\$4,00$ e $\$5,00$.

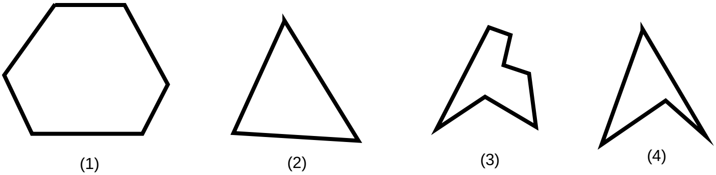
Insira mais um selo que custa $\$4,00$. Agora o valor em selos é:
$\$k-3+4=k+1$. $\square$.

Exemplo 9

Conjectura: Um polígono simples, com n lados, $n \geq 3$, pode ser triangulado em $n - 2$ triângulos.

Definição

Um polígono é **convexo** se qualquer segmento de reta que liga dois pontos do polígono está totalmente dentro do polígono.

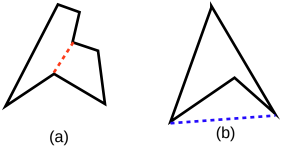


(1) e (2) são convexos e (3) e (4) são não-convexos.

Definição

A **diagonal** de um polígono é um segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos do polígono.

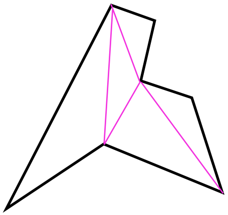
A diagonal é **interna** se todos os seus pontos estão dentro so polígono.



Em (a) a diagonal é interna e em (b) é externa.

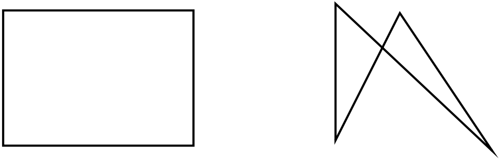
Definição

Triangulação é a divisão do polígono em triângulos adicionando-se diagonais que não se cruzam.



Definição

Um **polígono simples** é um polígono onde não há interseção entre dois lados não consecutivos.



(a) (b)

Em (a) o polígono é simples e em (b) não é simples.

Lema 1: Todo polígono simples tem uma diagonal interna.

Exemplo 9

Conjectura: Um polígono simples, com n lados, $n \geq 3$, pode ser triangulado em $n-2$ triângulos.

Base: Quando $n = 3$, o polígono é um triângulo e não precisa ser triangulado. Existe $3 - 2 = 1$ triângulo.

Hipótese de indução: Um polígono simples, com m lados, $3 \leq m \leq k$, pode ser triangulado em $m-2$ triângulos.

Passo: Considere um polígono com $k+1$ lados. Se $k+1=3$, está provado pela base. Então, suponha $k+1>3$.

Como o polígono é simples, pelo Lema 1, existe uma diagonal interna que conecta dois vértices, a e b.

Separe o polígono em dois com a diagonal interna ab.

Os dois novos polígonos tem $r+1$ e $n-r+1$ segmentos de reta, com $r \leq k$ e $n-r \leq k$.

Pela hipótese de indução, um deles tem uma triangulação com $r-1$ triâgulos e o outro tem uma triangulação com $n-r-1$ triângulos.

No total, são $n-2$ triângulos. □