Lógica de Predicados

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

GERSTING, Judith L.,*Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics, 6th ed., 2007.*

ROSEN, Kenneth H., Discrete Mathematics and its applications, 6th ed., 2007.

Validade dos Argumentos

Como verificar a validade dos argumentos na Lógica de Predicados?

Como o valor-verdade das expressões depende da interpretação (domínio e predicados), não é possível expressar todas as possibilidades em uma tabela verdade.

Usamos sequências de provas!

Todas as regras de inferência da Lógica Proposicional são válidas na Lógica de Predicados.

Instanciação Universal

Dada uma expressão

$$\forall x P(x)$$

pode-se concluir que é verdadeira:

$$P(a) \land P(b) \land P(c) \land P(d), \ldots$$

com a conjunção de predicados de todos os elementos do domínio.

Por simplificação, pode concluir que

$P(a)$ é verdade, onde a é um elemento do domínio.

Exemplo de instanciação universal

Aristóteles disse:

"Todos os humanos são mortais. Sócrates é humano. Portanto, Sócrates é mortal."

Usando Lógica de Predicados:

$H(x)$: x é humano.

$M(x)$: x é mortal.

s é uma constante, $s =$ Sócrates (um elemento do domínio dos humanos)

Argumento: $\forall x(H(x) \to M(x)) \wedge H(s) \to M(s)$

Instanciação Universal

Vejamos uma sequência de prova para o argumento

$$\forall x(H(x) \to M(x)) \wedge H(s) \to M(s)$$

1. $\forall x(H(x) \to M(x))$, hipótese.
2. $H(s)$, hipótese.
3. $H(s) \to M(s)$, instanciação universal em 1, para s pertencente ao domínio.
4. $M(s)$, modus ponens em 2 e 3.

Observe que no passo (3), podemos escrever a implicação da hipótese sem o quantificador, por restringirmos a um único elemento do domínio.

Instanciação Existencial

Dada uma expressão

$$\exists x P(x)$$

pode-se concluir que:

$$P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee P(d) \vee \dots$$

com a disjunção de predicados de todos os elementos do domínio.

Isso implica que para algum elemento do domínio o predicado P é verdade e podemos dar um nome para esse elemento específico.

Instanciação Existencial

Vamos usar instanciação universal e existencial para provar:

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists y P(y) \to \exists y Q(y)$$

Instanciação Existencial

Vamos usar instanciação universal e existencial para provar:

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists y P(y) \to \exists y Q(y)$$

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$, hipótese.
2. $\exists y P(y)$, hipótese.
3. $P(a)$, instanciação existencial em (2), para algum elemento a do domínio.
4. $P(a) \to Q(a)$, instanciação universal em (1), para o elemento a.
5. $Q(a)$, modus ponens em (3) e (4).
6. $\exists y Q(y)$, existe um elemento, que é a.

Instanciação Existencial

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, hipótese.
2. $\exists y P(y)$, hipótese.
3. $P(a)$, instanciação existencial em (2), para algum elemento a do domínio.
4. $P(a) \rightarrow Q(a)$, instanciação universal em (1), para o elemento a.
5. $Q(a)$, modus ponens em (3) e (4).
6. $\exists y Q(y)$, existe um elemento, que é a.

Observe que os passos (3) e (4) não podem ser invertidos. Suponha que por $P(a) \rightarrow Q(a)$ ser verdade para todos, consideramos um a em particular. Como ter certeza que é para este a que $P(a)$ é verdadeira?

Generalização Existencial

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \land \exists y P(y) \to \exists y Q(y)$$

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$, hipótese.
2. $\exists y P(y)$, hipótese.
3. $P(a)$, instanciação existencial em (2), para algum elemento a do domínio.
4. $P(a) \to Q(a)$, instanciação universal em (1), para o elemento a.
5. $Q(a)$, modus ponens em (3) e (4).
6. $\exists y Q(y)$, existe um elemento, que é a.

O passo 6 é chamado de **generalização existencial**.

Generalização Universal

Se uma variável

- não resulta de instanciação existencial;
- e nem é variável livre,

então **é um elemento qualquer do domínio**.

Qualquer informação dita sobre um elemento qualquer do domínio é uma **generalização universal** para todos os elementos do domínio.

Generalização Universal

Vamos provar o argumento:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \land \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Generalização Universal

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$, hipótese.
2. $\forall x(P(x)$, hipótese.
3. $P(a) \to Q(a)$, instanciação universal em (1), a é qualquer elemento do domínio.
4. $P(a)$, instanciação universal em (2), a é qualquer elemento do domínio.
5. $Q(a)$, modus ponens em (3) e (4).
6. $\forall x Q(x)$, generalização universal em (5): já que a é qualquer elemento do domínio, vale para todo x.

Instanciação e Generalização

Estratégia de prova

É importante observar a estratégia de prova da Lógica de Predicados:

consiste em

- utilizar instanciações e generalizações universais e existenciais para obter expressões lógicas sem quantificadores;
- usar as regras de inferência e equivalências lógicas da Lógica Proposicional para manipular as premissas sem quantificadores;
- quando necessário, usar generalizações e instanciações para chegar à conclusão com quantificadores.

Provas na Lógica de Predicados

Vamos provar:

$$\forall x(P(x) \land Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$$

Vamos provar:

$$\forall x(P(x) \land Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$$

1. $\forall x(P(x) \land Q(x))$, hipótese.
2. $P(x) \land Q(x)$, instanciação universal em (1).
3. $P(x)$, simplificação em (2).
4. $Q(x)$, simplificação em (2).
5. $\forall x P(x)$, generalização universal em (3).
6. $\forall x Q(x)$, generalização universal em (4).
7. $\forall x Q(x) \land \forall x Q(x)$, conjunção em (5) e (6).

Provas com Hipótese Temporária

Hipótese Temporária

Assumindo temporariamente alguma hipótese $T(x)$ e usando as demais premissas e equivalências lógicas e regras de inferência, pode-se eventualmente concluir $Q(x)$.

Então, sabemos que se $T(x)$ for verdade, então $Q(x)$ será verdade.

Podemos então, discartar a hipótese temporária e utilizar com segurança a premissa:

$$T(x) \rightarrow Q(x)$$

É uma ferramenta útil em algumas demonstrações, como veremos.

Provas com Hipótese Temporária

Vamos provar:

$$(P(x) \rightarrow \forall y Q(x,y)) \rightarrow \forall y (P(x) \rightarrow Q(x,y))$$

Provas com Hipótese Temporária

Vamos provar:

$$(P(x) \rightarrow \forall y Q(x,y)) \rightarrow \forall y (P(x) \rightarrow Q(x,y))$$

1. $P(x) \rightarrow \forall y Q(x,y)$, hipótese.
2. $P(x)$, hipótese temporária.
3. $\forall y Q(x,y)$, modus ponens em (1) e (2).
4. $Q(x,y)$, instanciação universal em (3), para y qualquer do domínio.
5. $P(x) \rightarrow Q(x,y)$, descartando a hipotese temporária $P(x)$.
6. $\forall y (P(x) \rightarrow Q(x,y))$, generalização universal em (5).

Provas com Hipótese Temporária

Para provar: $\neg(\exists x A(x)) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$.

Temos que provas duas implicações:

1. $\neg(\exists x A(x)) \rightarrow \forall x \neg A(x)$.
2. $\forall x \neg A(x) \rightarrow \neg(\exists x A(x))$.

Provas com Hipótese Temporária

Prova de ida:

$$\neg(\exists x A(x)) \to \forall x \neg A(x)$$

1. $\neg\exists x A(x)$, hipótese.
2. $A(x)$, hipótese temporária.
3. $\exists x A(x)$, generalização existencial em (2).
4. $A(x) \to \exists x A(x)$, descartando a hipótese temporária $A(x)$.
5. $\neg A(x)$, modus tollens, (1) e (4).
6. $\forall x \neg A(x)$, generalização universal de (5).

Provas com Hipótese Temporária

Prova de volta: $\forall x \neg A(x) \rightarrow \neg(\exists x A(x))$

1. $\forall x \neg A(x)$, hipótese.
2. $\exists x A(x)$, hipótese temporária.
3. $A(q)$, instanciação existencial em (2).
4. $\neg(\forall x \neg A(x))$, (3) e definição de quantificador universal.
5. $\exists x A(x) \rightarrow \neg\forall x \neg A(x)$, descartando a hipótese temporária.
6. $\neg(\neg\forall x \neg A(x)) \rightarrow \neg(\exists x A(x))$, contraposição em (5).
7. $\forall x \neg A(x) \rightarrow \neg(\exists x A(x))$, dupla negação em (6).
8. $\neg(\exists x A(x))$, modus ponens em (1) e (7).

Provas Usando o Método Dedutivo

Vamos provar:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow [(\neg\exists x P(x)) \rightarrow \forall x Q(x)]$$

Provas Usando o Método Dedutivo

Vamos provar:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow [(\neg\exists x P(x)) \rightarrow \forall x Q(x)]$$

Pelo Método Dedutivo podemos reescrever:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Provas Usando o Método Dedutivo

Vamos provar: $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)]$

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, hipótese.
2. $\neg\exists x P(x)$, hipótese.
3. $P(x) \vee Q(x)$, instanciação universal em (1).
4. $\forall x \neg P(x)$, negação em (2).
5. $\neg P(x)$, instanciação universal em (4).
6. $\neg P(x) \rightarrow Q(x)$, regra da implicação em (3).
7. $Q(x)$, modus ponens em (5) e (6).
8. $\forall x Q(x)$, generalização universal em (7).

Argumentos em Língua Natural

Diga se este argumento é válido:

Todo computador tem uma porta serial. Alguns computadores tem uma porta paralela. Portanto, alguns computadores tem porta serial e paralela.

Representação em Lógica de Predicados:

Domínio: todos os computadores.

$S(x)$: x tem porta serial.

$P(x)$: x tem porta paralela.

$\forall x S(x) \wedge \exists x P(x) \rightarrow \exists x (S(x) \wedge P(x))$.

Argumentos em Língua Natural

Vamos provar: $\forall x S(x) \wedge \exists x P(x) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$.

1. $\forall x S(x)$, hipótese.
2. $\exists x P(x)$, hipótese.
3. $S(x)$, instanciação universal em (1).
4. $P(x)$, instanciação existencial em (2).
5. $S(x) \wedge P(x)$, conjunção em (3) e (4).
6. $\exists x(S(x) \wedge P(x))$, generalização existencial em (5).