Predicados e Quantificadores

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

GERSTING, Judith L.,*Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics, 6th ed., 2007.*

ROSEN, Kenneth H., Discrete Mathematics and its applications, 6th ed., 2007.

Como expressar a proposição “Para todo número inteiro x, o valor de x é positivo.” usando lógica proposicional?

Esta proposição contém duas características distintas das anteriores:

- predicados,
- e quantificadores.

Predicado

Predicado

O predicado é uma propriedade ou atributo.

Exemplo: $x > 0$

Predicados podem ser representados por funções das variáveis a que se referem.

Exemplo: $P(x)$: x é azul.

Predicado

Exemplo: Considere o predicado: $P(x) : x > 3$.

Qual o valor-verdade das proposições a seguir?

- $P(2)$
- $P(3)$
- $P(4)$

Predicado

Exemplo: Considere o predicado: $P(x) : x > 3$.

Qual o valor-verdade das proposições a seguir?

- $P(2)$ falso
- $P(3)$ falso
- $P(4)$ verdadeiro

Predicado

Considere o predicado: $R(x, y, z) : x + y = z$.

Qual o valor-verdade das proposições a seguir?

- $R(1, 2, 3)$
- $R(3, 2, 1)$
- $R(0, 0, 1)$

Predicado

Considere o predicado: $R(x, y, z) : x + y = z$.

Qual o valor-verdade das proposições a seguir?

- $R(1, 2, 3)$ verdadeiro
- $R(3, 2, 1)$ falso
- $R(0, 0, 1)$ falso

Quantificadores

Quantificadores

Quantificadores são expressões como "para todo", "para cada", "para algum", "existe um", que dizem de alguma forma quantos objetos têm uma certa propriedade.

Quantificadores

Quantificador Universal $\forall x$

Lê-se: para todo x, para cada x, todo x.

Exemplo: $\forall x(x > 0)$ representa a senteça:

'Todo número x é positivo."

Quantificador Existencial $\exists x$

Lê-se: para algum x, existe um x, pelo menos um x.

Exemplo: $\exists x(x > 0)$ representa a senteça:

"Existe um número x positivo."

Domínio

O valor-verdade de uma expressão depende do domínio da variável.

Exemplo: $\forall x(x \geq 0)$

Domínio: números naturais.
Valor-verdade: verdadeira.

Domínio: números inteiros
Valor-verdade: falsa. (Contraexemplo: $x = -2$, $x = -10$, entre outros.)

Exemplo: $\exists x(x > 0)$

Se o domínio contém um número positivo, então a expressão é verdadeira. Caso contrário, é falsa.

Domínio

Exemplo: dê o valor-verdade das expressões lógicas a seguir.

Domínio: todos os livros da biblioteca da UTFPR - Ponta Grossa

$P(x)$: x tem capa vermelha.

$\forall x P(x)$

$\exists x P(x)$

Domínio

Exemplo: dê o valor-verdade das expressões lógicas a seguir.

Domínio: todos os livros da biblioteca da UTFPR - Ponta Grossa

$P(x)$: x tem capa vermelha.

$\forall x P(x)$ falso

$\exists x P(x)$ verdadeira
(Deve existir algum livro com capa vermelha na biblioteca!)

Domínio

Dê o valor-verdade da expressão lógica:

- $\forall x P(x)$, onde $P(x) : x$ é um vegetal.
  Domínio: todas as árvores frutíferas.

- $\forall x P(x)$, onde $P(x) : x$ é positivo ou negativo.
  Domínio: números inteiros.

- $\exists x P(x)$, onde $P(x) : x > 3$. Domínio: números reais.

- $\exists x P(x)$, onde $P(x) : x = x + 1$. Domínio: números reais.

Domínio

Dê o valor-verdade da expressão lógica:

- $\forall x P(x)$, onde $P(x) : x$ é um vegetal.
  Domínio: todas as árvores frutíferas. verdadeiro
- $\forall x P(x)$, onde $P(x) : x$ é positivo ou negativo.
  Domínio: números inteiros. falso
- $\exists x P(x)$, onde $P(x) : x > 3$. Domínio: números reais. verdadeiro
- $\exists x P(x)$, onde $P(x) : x = x + 1$. Domínio: números reais. falso

Quantificador de Unicidade

Quantificador de Unicidade

O quantificador de unicidade indica que **existe exatamente um** elemento que satisfaz o predicado.

Denota-se: $\exists! x P(x)$ ou $\exists_1 x P(x)$.

Quantificador de Unicidade

Exemplos

$\exists! x(2x = 0)$, no domínio dos números reais é verdadeira e $x = 0$.

$\exists_1 x(x^2 < 0)$, no domínio dos números reais é falsa.

$\exists! x(x > 1000)$, no domínio dos números naturais é falsa.

Quantificador de Domínio Restrito

Pode-se incluir imediatamente após o quantificador uma notação abreviada que limita o domínio.

Exemplos:

- $\forall x < 0(x^2 > 0)$
- $\forall y \neq 0(y^3 \neq 0)$
- $\exists z > 0(z^2 = 2)$

Quantificador de Domínio Restrito

O quantificador universal de domínio restrito pode ser substituído por um conectivo condicional:

- $\forall x < 0(x^2 > 0) \equiv \forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$
- $\forall y \neq 0(y^3 \neq 0) \equiv \forall y(y \neq 0 \rightarrow y^3 \neq 0)$

O quantificador existencial de domínio restrito pode ser substituído por uma conjunção:

- $\exists z > 0(z^2 = 2) \equiv \exists z(z > 0 \wedge z^2 = 2)$

Prioridade dos Quantificadores

Os quantificadores tem prioridade sobre qualquer conectivo da lógica proposicional:

$\exists z z > 0 \wedge z^2 = 2 \not\equiv \exists z(z > 0 \wedge z^2 = 2)$

$\exists z z > 0 \wedge z^2 = 2 \equiv \exists z(z > 0) \wedge z^2 = 2$

$\forall x P(x) \vee Q(x) \equiv \forall x(P(x)) \vee Q(x)$

$\forall x P(x) \vee Q(x) \not\equiv \forall x(P(x) \vee Q(x))$

Equivalências Lógicas Quantificadas

Cuidado com as equivalências entre expressões quantificadas compostas:

$\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$

$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$

$\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$

$\exists x(P(x) \land Q(x)) \not\equiv \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

Fórmulas bem formadas (wffs)

Expressões devem obedecer regras de sintaxe para serem fórmulas bem formadas:

- $P(x)\forall x \land \exists y$ não é uma wff.
- $\forall x(P(x) \to Q(x))$ é uma wff.
- $(\exists x)S(x) \lor (\forall y)T(y)$ é uma wff.

Terminologia

O **escopo** de um quantificador é o contexto que o mesmo abrange.

Se não há parênteses, o escopo é o predicado seguinte. Caso contrário, o escopo é determinado pelo próximo parêntese e/ou colchete à direita.

Exemplos

$\exists x P(X) \lor \forall y T(y)$

O escopo de $\exists x$ é $P(x)$ e o escopo de $\forall y$ é $T(y)$.

$\exists x[A(x) \land \forall y(B(x,y) \to C(y))]$

O escopo de $\exists x$ é $A(x) \land \forall y(B(x,y) \to C(y)$.

O escopo de $\forall y$ é $B(x,y) \to C(y)$.

Variáveis livres

Terminologia

Se uma variável aparece em alguma fórmula bem formada e não faz parte de nenhum quantificador, então é uma **variável livre**.

Exemplo: y é uma variável livre em $(\forall x)[Q(x,y) \to (\exists y)R(x,y)]$,

porque y ocorre pela primeira vez sem estar acompanhado de um quantificador.

Variáveis livres

Exemplo: Considere o domínio de todos os números inteiros.

$P(x) : x > 0$

Qual o valor verdade de $P(y) \wedge P(5)$?

Qual o valor verdade de $P(y) \vee P(5)$?

Variáveis livres

Exemplo: Considere o domínio de todos os números inteiros.

$P(x) : x > 0$

Qual o valor verdade de $P(y) \land P(5)$? indefinido

Qual o valor verdade de $P(y) \lor P(5)$? verdade

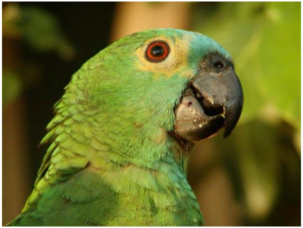
Observe que, nos dois casos, y é uma variável livre, não está associada a um quantificador.

Tradução

Muitas frases podem ser escritas por predicados lógicos.

Considere a frase: "Todo papagaio é feio."

É o mesmo que dizer: "Para qualquer coisa, se essa coisa é um papagaio, então é feio."

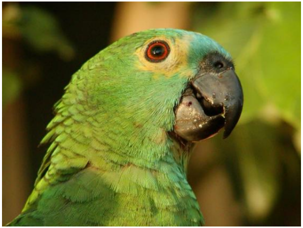


Tradução

Muitas frases podem ser escritas por predicados lógicos.

Considere a frase: "Todo papagaio é feio."

É o mesmo que dizer: "Para qualquer coisa, se essa coisa é um papagaio, então é feia."



Sejam $P(x) : x$ é um papagaio e $F(x) : x$ é feio.

Simbolicamente: $\forall x(P(x) \rightarrow F(x))$.

Tradução

Dica: *"o quantificador universal e o conectivo de implicação quase sempre estão juntos."*

Poderíamos substituir, neste contexto, $\forall x(P(x) \to F(x))$ por $\forall x(P(x) \wedge F(x))$?

Tradução

Dica: *"o quantificador universal e o conectivo de implicação quase sempre estão juntos."*

Poderíamos substituir, neste contexto, $\forall x(P(x) \rightarrow F(x))$ por $\forall x(P(x) \land F(x))$? **Não! nem tudo no mundo é papagaio feio!**

Tradução

Considere a frase: "Existe um papagaio feio."

É o mesmo que dizer: "Existe uma coisa, que é um papagaio e é feia."

Sejam $P(x) : x$ é um papagaio e $F(x) : x$ é feia.

Simbolicamente: $\exists x(P(x) \wedge F(x))$.

Tradução

Dica: *"o quantificador existencial e o conectivo* $\wedge$ *quase sempre estão juntos."*

Poderíamos substituir, neste contexto, $\exists x(P(x) \wedge F(x))$ por $\exists x(P(x) \rightarrow F(x))$?

Tradução

Poderíamos substituir, neste contexto, $\exists x(P(x) \wedge F(x))$ por $\exists x(P(x) \rightarrow F(x))$?

O que precisa acontecer para que nosso predicado seja verdade?

Basta não existir papagaios.

Mas se não existir, então não existe um papagaio feio. (Que é o que queríamos afirmar!).

A implicação não traduziu exatamente o que queríamos dizer.

Tradução

Considere: $M(x)$: x é um mamífero, $Q(x)$: x é quadrúpede, $B(x)$: x gosta de brincar, onde o domínio são todos os animais.

Escreva predicados bem formados para as seguintes proposições:

1. Todos os mamíferos gostam de brincar.

2. Alguns mamíferos quadrúpedes gostam de brincar.

3. Todos que gostam de brincar são mamíferos não quadrúpedes.

4. Só mamíferos quadrúpedes gostam de brincar.

Tradução

Considere: $M(x)$: x é um mamífero, $Q(x)$: x é quadrúpede, $B(x)$: x gosta de brincar, onde o domínio são todos os animais.

Escreva predicados bem formados para as seguintes proposições:

1. Todos os mamíferos gostam de brincar.
   $\forall x(M(x) \to B(x))$
2. Alguns mamíferos quadrúpedes gostam de brincar.
   $\exists x(M(x) \land Q(x) \land B(x))$
3. Todos que gostam de brincar são mamíferos não quadrúpedes.
   $\forall x(B(x) \to M(x) \land \neg Q(x))$
4. Só mamíferos quadrúpedes gostam de brincar.
   $\forall x(B(x) \to M(x) \land Q(x))$

Terminologia

Dois quantificadores estão **agrupados** se um está no escopo do outro.

Exemplo: $\forall x \exists y (x + y = 0)$.

Escopo de $\exists y$: $(x + y = 0)$.

Escopo de $\forall x$: $\exists y (x + y = 0)$.

Exemplo: o que significam as seguintes expressões?

Domínio: todos os números reais.

$\forall x \forall y (x + y = y + x)$.

$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = x + (y + z))$.

$\forall x \forall y ((x > 0) \land (y < 0) \rightarrow xy < 0)$.

Quantificadores Agrupados

Exemplo: o que significam as seguintes expressões?

Domínio: todos os números reais.

$\forall x \forall y (x + y = y + x)$.
A ordem dos termos não altera o resultado.

$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = x + (y + z))$.
A ordem das somas não altera o resultado.

$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow xy < 0)$.
Multiplicação de números com paridades distintas é negativa.

Ordem dos Quantificadores

Se os quantificadores não são todos universais (ou todos existenciais) então a ordem dos quantificadores faz diferença na interpretação.

Exemplo: seja $P(x, y) : x + y = y + x$ e o domínio dos números reais.

Qual o valor verdade para $\forall x \forall y P(x, y)$?

Qual o valor verdade para $\forall y \forall x P(x, y)$?

Exemplo: seja $Q(x, y) : x + y = 0$ e o domínio dos números reais.

Qual o valor verdade para $\forall x \exists y Q(x, y)$?

Qual o valor verdade para $\exists y \forall x Q(x, y)$?

Ordem dos Quantificadores

Se os quantificadores não são todos universais (ou todos existenciais) então a ordem dos quantificadores faz diferença na interpretação.

Exemplo: seja $P(x, y) : x + y = y + x$ e o domínio dos números reais.

Qual o valor verdade para $\forall x \forall y P(x, y)$? verdadeiro

Qual o valor verdade para $\forall y \forall x P(x, y)$? verdadeiro

Exemplo: seja $Q(x, y) : x + y = 0$ e o domínio dos números reais.

Qual o valor verdade para $\forall x \exists y Q(x, y)$? verdadeiro

Qual o valor verdade para $\exists y \forall x Q(x, y)$? falso

Valor-verdade das Expressões

Quando uma expressão $\forall x P(x)$ é falsa?

Quando uma expressão $\exists x P(x)$ é falsa?

Valor-verdade das Expressões

Quando uma expressão $\forall x P(x)$ é falsa?

Quando existe um x no domínio que não satisfaz $P(x)$

Quando uma expressão $\exists x P(x)$ é falsa?

Quando todo x do domínio não satisfaz $P(x)$

Negação com Quantificadores

Para negar uma expressão $\forall x P(x)$ é suficiente descrever por uma fórmula bem formada quando essa sentença é falsa:

$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(X))$

Para negar qualquer expressão da lógica de predicados é suficiente descrever por uma fórmula bem formada quando essa sentença é falsa:

$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(X))$

Negação com Quantificadores Agrupados

Escreva a negação de cada uma das sentenças:

- $\forall x \forall y P(x, y)$
- $\forall x \exists y P(x, y)$
- $\exists x \forall y P(x, y)$
- $\exists x \exists y P(x, y)$

Negação com Quantificadores Agrupados

Escreva a negação de cada uma das sentenças:

- $\forall x \forall y P(x, y)$
  $\exists x \exists y \neg P(x, y)$.
- $\forall x \exists y P(x, y)$
  $\exists x \forall x \neg P(x, y)$.
- $\exists x \forall y P(x, y)$
  $\forall x \exists y \neg P(x, y)$.
- $\exists x \exists y P(x, y)$
  $\forall x \forall y \neg P(x, y)$.

Negação com Quantificadores Agrupados

Negue a sentença: $\forall x \exists y (xy = 1)$.

Negação com Quantificadores Agrupados

Negue a sentença: $\forall x \exists y (xy = 1)$.

$\neg(\forall x \exists y (xy = 1)) \equiv \exists x \neg(\exists y (xy = 1))$

$\equiv \exists x \forall y (xy \neq 1)$

Tradução

Considere $C(x)$: x tem um computador. e $F(x, y)$: x e y são amigos.

Domínio: estudantes da UTFPR.

Traduza: $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y))$.

Considere $F(x, y)$: x e y são amigos.

Domínio: estudantes da UTFPR.

Traduza: $\exists x \forall y \forall z(F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge y \neq z \rightarrow \neg F(y, z))$.

Tradução

Considere $C(x)$: x tem um computador. e $F(x, y)$: x e y são amigos.

Domínio: estudantes da UTFPR.

Traduza: $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y))$.

Todos têm um computador ou têm um amigo que tem um computador.

Considere $F(x, y)$: x e y são amigos.

Domínio: estudantes da UTFPR.

Traduza: $\exists x \forall y \forall z(F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge y \neq z \rightarrow \neg F(y, z))$.

Existe um estudante tal que quaisquer dois amigos dele não são amigos entre si.

Tradução

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

Tradução

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

$P(x)$: x é do sexo feminino.

$Q(x)$: x tem filhos.

$M(x, y)$: x é mãe de y.

Tradução

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

$P(x)$: x é do sexo feminino.

$Q(x)$: x tem filhos.

$M(x, y)$: x é mãe de y.

$\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \exists y M(x, y))$.

Tradução

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

$P(x)$: x é do sexo feminino.

$Q(x)$: x tem filhos.

$M(x, y)$: x é mãe de y.

$\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to \exists y M(x, y))$.

Como y não aparece em $P(x) \wedge Q(x)$, podemos reescrever:
$\forall x \exists y(P(x) \wedge Q(x) \to M(x, y))$.

Tradução

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

Tradução

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

$P(x, y)$: x é o melhor amigo de y. **Atenção:** não inclua quantificadores nos predicados!

Tradução

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

$P(x, y)$: x é o melhor amigo de y. **Atenção:** não inclua quantificadores nos predicados!

$\forall y \exists_1 x P(x, y)$.

Tradução

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

$P(x, y)$: x é o melhor amigo de y. **Atenção:** não inclua quantificadores nos predicados!

$\forall y \exists_1 x P(x, y)$.

$\forall y \exists x (P(x, y) \land (\exists z P(z, y) \rightarrow z = x))$.

$\forall y \exists x (P(x, y) \land (\forall z (z \neq x \rightarrow \neg P(z, y))))$.