Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

GERSTING, Judith L.,*Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics, 6th ed., 2007.*

ROSEN, Kenneth H., Discrete Mathematics and its applications, 6th ed., 2007.

Argumentos Válidos

Considere o argumento: "Se João pensa, então João existe. João pensa. Portanto, João existe."

Traduzindo para lógica:

Argumentos Válidos

Considere o argumento: “Se João pensa, então João existe. João pensa. Portanto, João existe.”

Traduzindo para lógica:

A : João pensa. B : João existe.

Argumentos Válidos

Considere o argumento: "Se João pensa, então João existe. João pensa. Portanto, João existe."

Traduzindo para lógica:

A : João pensa. B : João existe.

$A \rightarrow B$

A

$\therefore B$

Argumentos Válidos

Esse argumento é válido?

A : João pensa. B : João existe.

$A \rightarrow B$ (premissa)

A (premissa)

$\therefore B$ (conclusão)

Para verificar se um argumento é valido, assumimos que suas premissas são verdadeiras e conferimos o valor verdade da conclusão.

Argumentos Válidos

Esse argumento é válido?

A : João pensa. B : João existe.

$A \rightarrow B$ verdade.

A verdade.

$\therefore B$ (conclusão)

Para verificar se um argumento é valido, assumimos que suas premissas são verdadeiras e conferimos o valor verdade da conclusão.

Argumentos Válidos

Esse argumento é válido?

A : João pensa. B : João existe.

$A \rightarrow B$ verdade

A verdade.

$\therefore B$

Como A é verdade e $A \rightarrow B$ é verdade, só há um possível valor verdade para B. Qual é?

Argumentos Válidos

Esse argumento é válido?

A : João pensa. B : João existe.

$A \rightarrow B$ verdade

A verdade.

$\therefore B$ verdade.

Argumentos Válidos

$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ é uma tautologia.

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge A$	$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Argumentos Válidos

Definição:

Um **argumento** em lógica proposicional é uma sequência de proposições.

Todas as proposições, exceto a última, são chamadas de **premissas**.

A última proposição é a **conclusão**.

Um **argumento é válido** se a validade das premissas implica na validade da conclusão.

Argumentos válidos

O método formal que usa proposições bem formadas é chamado **lógica proposicional** ou **cálculo proposicional**.

Argumentos válidos

Um argumento pode ser apresentado de forma simbólica como:

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$,

onde P_1, P_2, P_3, ..., P_n são sentenças lógicas, chamadas de **hipóteses** ou **premissas**;

e Q é chamada de **conclusão**.

Argumentos válidos

Quando $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_k \rightarrow Q$ é um argumento válido?

Argumentos válidos

Quando $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_k \rightarrow Q$ é um argumento válido?

Pela tabela verdade da implicação e pela definição da conjunção, quando:

- uma das premissas for falsa; ou
- quando todas as premissas e a conclusão são verdadeiras.

Argumentos válidos

Exemplo

Dom Pedro I foi o primeiro imperador do Brasil. Dom Pedro I Declarou a independência. Portanto, todo dia tem 24 horas.

Esse argumento tem duas hipóteses:

A: Dom Pedro I foi o primeiro imperador do Brasil.

B: Dom Pedro I Declarou a independência.

Conclusão:

C: Todo dia tem 24 horas.

Representação simbólica: $A \wedge B \rightarrow C$.

Argumentos válidos

Exemplo

Dom Pedro I foi o primeiro imperador do Brasil. Dom Pedro I Declarou a independência. Portanto, todo dia tem 24 horas.

Representação simbólica: $A \wedge B \rightarrow C$.

Pergunta: Isso é um argumento válido?

Argumentos válidos

Exemplo

Dom Pedro I foi o primeiro imperador do Brasil. Dom Pedro I Declarou a independência. Portanto, todo dia tem 24 horas.

Representação simbólica: $A \wedge B \to C$.

Pergunta: Isso é um argumento válido para a conclusão? Não!

A conclusão é um fato isolado. Não tem relação com as hipóteses!

Exemplo

Se o Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil, então Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente. O Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil. Segue que Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente do Brasil.

Representação simbólica:

Exemplo

Se o Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil, então Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente. O Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil. Segue que Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente do Brasil.

Representação simbólica:

A: O Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil.

B: Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente.

$(A \to B) \wedge A \to B$

Argumentos válidos

Exemplo

Se o Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil, então Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente. O Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil. Segue que Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente do Brasil.

Representação simbólica:

$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$

Hipóteses:

$A \rightarrow B$

A

Conclusão:

B

Argumentos válidos

Exemplo

Se o Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil, então Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente. O Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil. Segue que Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente do Brasil.

Representação simbólica: $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$.

Hipóteses:

$A \rightarrow B$

A

Conclusão:

B

Pergunta: Esse é um argumento válido?

Argumentos válidos

Exemplo
Se o Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil, então Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente. O Marechal Deodoro da Fonseca foi o primeiro presidente do Brasil. Segue que Floriano Peixoto foi o primeiro vice-presidente do Brasil.

Representação simbólica: $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$.

Hipóteses:
$A \rightarrow B$
A

Conclusão:
B

Pergunta: Esse é um argumento válido? Sim!
A conclusão segue inevitavelmente da hipótese.

Argumentos válidos

Essa forma de argumentação é conhecida como **Modus Ponens** ou eliminação da implicação.

$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$

É uma das regras de inferência usadas na Lógica Proposicional.

Argumentos Válidos

Considere que as seguintes hipóteses são verdadeiras.

- Se Marília fizer muitos exercícios, então vai bem na prova de Matemática Discreta.
- Marília fez muitos exercícios.

Por **modus ponens**, Marília vai bem na prova de Matemática Discreta.

Argumentos Válidos

Esse argumento é válido?

Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, então $(\sqrt{2})^2 > (\frac{3}{2})^2$.

Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$.

Por modus ponens, $(\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Argumentos Válidos

Esse argumento é válido?

Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, então $(\sqrt{2})^2 > (\frac{3}{2})^2$.

Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. $\leftarrow$ falsa

Por modus ponens, $(\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Argumentos Válidos

Esse argumento é válido?

Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, então $(\sqrt{2})^2 > (\frac{3}{2})^2$.

Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. $\leftarrow$ falsa

Por modus ponens, $(\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$. $\leftarrow$ falsa

Usar modus ponens é válido, mas as premissas tem que ser verdadeiras.

Existem outras regras de inferência, que podem auxiliar a verificar a validade dos argumentos quando as premissas são verdadeiras.

Vejamos alguns exemplos...

$A \rightarrow A \vee B$

Está chovendo. Portanto, está chovendo ou esquentando.

Nome da regra de inferência: **adição**.

Regras de Inferência

$A \wedge B \rightarrow A$

Está chovendo e esfriando. Portanto, está chovendo.

Nome da regra de inferência: **simplificação**.

Regras de Inferência

$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

Se chover hoje, não terá churrasco. Se não tiver churrasco hoje, terá churrasco amanhã. Então, se chover hoje, terá churrasco amanhã.

Nome da regra de inferência: **silogismo hipotético**.

Regras de Inferência

$(A \to B) \land \neg B \to \neg A$

Nome da regra de inferência: **modus tollens**.

Entendendo o Modus Tollens

A seguir, uma sequência de prova que garante a validade do Modus Tollens.

$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$

Hipóteses:

1) $A \rightarrow B$

2) $\neg A$

Regras de Inferência

Modus Tollens: $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$

1) $A \to B$ (hipótese)

2) $\neg B$ (hipótese)

3) $\neg B \to \neg A$ (equivalência lógica de (1), contraposição)

4) $\neg A$ (Modus Ponens de (2) e (3))

Portanto, concluímos $\neg A$.

Regras de Inferência

$(A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B$

Vou ao cinema ou vou estudar para a prova. Não vou ao cinema. Então vou estudar para a prova.

Nome da regra de inferência: **silogismo disjuntivo**.

Resolução é o nome da seguinte regra de inferência:

$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
Se A é verdade, então C tem que ser verdade.

Se A é falso, então B tem que ser verdade.

Então, ou C ou B tem que ser verdade.

Resolução é o nome da seguinte regra de inferência:

$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$

Jasmim está esquiando ou não está nevando. Está nevando ou José está jogando futebol. Portanto, Jasmim está esquisando ou José está jogando futebol.

Regras de Inferência

Mostre que $A \wedge B \vee C$ e $C \to D$ implicam $A \vee D$.

Mostre que $A \wedge B \vee C$ e $C \rightarrow D$ implicam $A \vee D$.

1. $A \wedge B \vee C$ (hipótese)
2. $C \rightarrow D$ (hipótese)
3. $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (distributiva em (1))
4. $A \vee C$ (simplificação em (3))
5. $\neg C \vee D$ (Regra da implicação em (2))
6. $(A \vee C) \wedge (\neg C \vee D)$ (conjunção de (4) e (5))
7. $A \vee D$ (resolução em (6)).

Método Dedutivo

Considere o seguinte argumento:

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots P_n \rightarrow (R \rightarrow S)$,

onde a conclusão $R \rightarrow S$ é uma implicação.

Pelo Método Dedutivo, pode-se considerar que R também é uma hipótese. Então:

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots P_n \wedge R \rightarrow S$.

Exemplo de uso do Método Dedutivo

Prove que $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$.

1. $A \to (A \to B)$ (hipótese)
2. A (hipótese, pelo método dedutivo)
3. $A \to B$ (modus ponens em (1) e (2))
4. B (modus ponens em (2) e (3))

Pelo Método Dedutivo, B é a conclusão em que deveríamos chegar, então está provado.

Verificando a Validade de Argumentos

O argumento é válido?

Esta tarde está ensolorada e está mais frio que ontem. Vamos nadar se estiver ensolarado. Se formos nadar, então vamos fazer um passeio de barco. Se fizermos um passeio de barco, estaremos em casa ao anoitecer. Então, estaremos em casa ao anoitecer.

O argumento é válido?

Esta tarde está ensolorada e está mais frio que ontem. Vamos nadar se estiver ensolarado. Se formos nadar, então vamos fazer um passeio de barco. Se fizermos um passeio de barco, estaremos em casa ao anoitecer. Então, estaremos em casa ao anoitecer.

A: Esta tarde está ensolorada.
B: Está mais frio que ontem.
C: Vamos nadar.
D: Vamos fazer um passeio de barco.
E: Estaremos em casa ao anoitecer.

Provas de Veracidade

1. $A \wedge B$ (pelo enunciado)
2. $A \rightarrow C$ (pelo enunciado)
3. $C \rightarrow D$ (pelo enunciado)
4. $D \rightarrow E$ (pelo enunciado)
5. $\neg C \rightarrow \neg A$ (contrapositiva de (2))
6. A (simplificação de (1))
7. C (modus tollens de (5) e (6))
8. D (modus ponens de (3) e (7))
9. E (modus ponens de (4) e (8), **conclusão**.)

Provas de Veracidade

O argumento é válido?

Se você me mandar um e-mail, então eu terminarei o programa. Se você não me mandar um e-mail, então vou dormir cedo. Se eu dormir cedo, acordarei me sentindo bem. Se eu não terminar o programa, acordarei me sentindo bem.

A: Você me manda um e-mail.
B: Eu termino o programa.
C: Vou dormir cedo.
D: Arcordarei me sentindo bem.

O argumento é válido?

1. $A \to B$ (pelo enunciado)
2. $\neg A \to C$ (pelo enunciado)
3. $C \to D$ (pelo enunciado)
4. $\neg A \to D$ (silogismo hipotético de (2) e (3))
5. $\neg B \to \neg A$ (contrapositiva de (1))
6. $\neg B \to D$ (silogismo hipotético de (4) e (5))

Provas de Veracidade

O argumento é válido?

1. $A \rightarrow B$ (pelo enunciado)
2. $\neg A \rightarrow C$ (pelo enunciado)
3. $C \rightarrow D$ (pelo enunciado)
4. $\neg A \rightarrow D$ (silogismo hipotético de (2) e (3))
5. $\neg B \rightarrow \neg A$ (contrapositiva de (1))
6. $\neg B \rightarrow D$ (silogismo hipotético de (4) e (5))

É válido.

Verificando a Validade de Argumentos

O caso do advogado de defesa

Se meu cliente é culpado, então a faca estava na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta, ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá em 10 de outubro, então Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá em 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos nós sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente.

O argumento do advogado parece correto? Como você votaria?

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(A \to B) \wedge B \to A$.

Se fizer calor, vou nadar. Vou nadar. Portanto, está calor.

Por que esse argumento é inválido?

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(A \to B) \land B \to A$.

Se fizer calor, vou nadar. Vou nadar. Portanto, está calor.

Por que esse argumento é inválido? Eu não disse nada sobre o que faria se não estivesse calor. Posso inclusive nadar nesse caso!

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(A \rightarrow B) \wedge B \rightarrow A$.

Conhecida como **falácia da afirmação da conclusão**.

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(A \to B) \land \neg A \to \neg B$.

Se eu fizer todos os exercícios do Rosen, vou aprender Matemática Discreta. Não fiz todos os exercícios do Rosen. Portanto, não aprendi Matemática Discreta.

Por que esse argumento é inválido?

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(A \rightarrow B) \land \neg A \rightarrow \neg B$.

Se eu fizer todos os exercícios do Rosen, vou aprender Matemática Discreta. Não fiz todos os exercícios do Rosen. Portanto, não aprendi Matemática Discreta.

Por que esse argumento é inválido? Porque é possível aprender Matemática Discreta sem fazer todos os exercícios do Rosen.

Hipótese falsa com conclusão verdadeira, também é uma sentença verdadeira!

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(A \rightarrow B) \wedge \neg A \rightarrow \neg B$.

Conhecida como **falácia da negação das hipóteses**.