Lógica Proposicional

Equivalências Lógicas

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

GERSTING, Judith L.,*Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics, 6th ed., 2007.*

ROSEN, Kenneth H., Discrete Mathematics and its applications, 6th ed., 2007.

Operador de Biimplicação

Lembre-se: uma proposição bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é verdade quando P e Q têm o mesmo valor verdade, e só neste caso.

Tabela verdade da biimplicação

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Equivalências Lógicas

Se duas proposições compostas, P e Q, possuem o mesmo valor-verdade em todos os casos, são chamadas de **logicamente equivalentes**.

Exemplo: $A \to B$ é logicamente equivalente a $\neg B \to \neg A$.

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \to \neg A$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Nestes casos, $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

Equivalências Lógicas

Se duas proposições compostas, P e Q, possuem o mesmo valor-verdade em todos os casos, são chamadas de **logicamente equivalentes**.

Exemplo: $A \rightarrow B$ é logicamente equivalente a $\neg B \rightarrow \neg A$.

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \rightarrow \neg A$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Neste caso, $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ é uma tautologia.

Equivalências Lógicas

Quando duas proposições lógicas A e B são equivalentes, indicamos por uma das seguintes formas:

- $A \equiv B$
- $A \Leftrightarrow B$

Atenção!!

Os símbolos $\equiv$ e $\Leftrightarrow$ **não são** operadores lógicos!

São apenas símbolos matemáticos usados para dizer que as proposições A e B têm os mesmos valores verdade em todos os casos.

Equivalências Lógicas

Exemplos:

- $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (Contrposição)

- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ (Lei de De Morgan)
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ (Propriedade Comutativa)
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ (Propriedade Associativa)
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Propriedade Distributiva)
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Equivalências Lógicas

Como saber se duas proposições lógicas compostas são logicamente equivalentes?

Como saber se duas proposições lógicas compostas são logicamente equivalentes?

Use tabelas verdade!

Exemplo: $(A \to B) \to B$ é logicamente equivalente a $(\neg B \to \neg A) \to B$.

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \to \neg A$	$(\neg B \to \neg A) \to B$
V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	F

Equivalência Lógica

Exemplo: $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ é logicamente equivalente a $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B$.

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B$
V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	F

Exemplo: $(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$.

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Equivalência Lógica

Exemplo: $(A \to B) \equiv \neg A \vee B$.

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Vamos chamar essa equivalência lógica de **regra da implicação**.

Exemplo: $A \equiv \neg(\neg A)$.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
V	F	V
V	F	V
F	V	F
F	V	F

Equivalência Lógica

Exemplo: $A \equiv \neg(\neg A)$.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
V	F	V
V	F	V
F	V	F
F	V	F

Essa equivalência lógica é a **dupla negação**.

Exemplo: Será que é mesmo verdade que $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$?

Equivalências Lógicas

Exemplo: Será que é mesmo verdade que $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$?

A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Equivalências Lógicas

Exemplo: Será que é mesmo verdade que $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$?

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Esta é uma das Leis de De Morgan!

Equivalências Lógicas

Augustus De Morgan (1806 - 1871)

- Foi um matemático indiano.
- Foi professor de Augusta Ada, Condessa de Lovelace.

Equivalências Lógicas

Augustus De Morgan (1806 - 1871)

- Escreveu milhares de artigos para mais de 15 periódicos e muitos livros teóricos.
- Formalizou conceitos como indução matemática e limite.

Augustus De Morgan (1806 - 1871)

- Deu contribuições fundamentais para o desenvolvimento da lógica simbólica.
- Criou notações que ajudaram a provar equivalências lógicas e as Leis de De Morgan.

Leis de De Morgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

Exercício: Use as Leis de De Morgan para negar:

"Miguel tem um celular e um laptop".

Leis de De Morgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

Exercício: Use as Leis de De Morgan para negar

"Miguel tem um celular e um laptop".

Miguel não tem um celular ou não tem um laptop.

Equivalências Lógicas

Leis de De Morgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

Exercício: Use as Leis de De Morgan para negar

"Rodrigo ou Carlos vai ao concerto".

Equivalências Lógicas

Leis de De Morgan:

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

Exercício: Use as Leis de De Morgan para negar

"Rodrigo ou Carlos vai ao concerto".

Rodrigo e Carlos não vão ao concerto.

Provando Equivalências Lógicas

Mostre que $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$**.**

Provando Equivalências Lógicas

Mostre que $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$.

$\neg(A \to B) \equiv \neg(\neg A \vee B)$ (Regra da implicação.)

Provando Equivalências Lógicas

Mostre que $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$**.**

$\neg(A \to B) \equiv \neg(\neg A \vee B)$ (Regra da implicação.)

$\equiv \neg(\neg A) \wedge \neg B$ (Lei de De Morgan.)

Provando Equivalências Lógicas

Mostre que $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$**.**

$\neg(A \rightarrow B) \equiv \neg(\neg A \vee B)$ (Regra da implicação.)

$\equiv \neg(\neg A) \wedge \neg B$ (Lei de De Morgan.)

$\equiv A \wedge \neg B$ (Regra da dupla negação.)

Provando Equivalências Lógicas

Mostre que $\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg B$**.**

Mostre que $\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg B$**.**

$\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg(\neg A \wedge B)$ (Lei de De Morgan.)

Provando Equivalências Lógicas

Mostre que $\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg B$**.**

$\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg(\neg A \wedge B)$ (Lei de De Morgan.)

$\equiv \neg A \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg B)$ (Lei de Demorgan.)

Provando Equivalências Lógicas

Mostre que $\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg B$**.**

$\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg(\neg A \wedge B)$ (Lei de De Morgan.)

$\equiv \neg A \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg B)$ (Lei de Demorgan.)

$\equiv \neg A \wedge (A \vee \neg B)$ (Regra da Dupla Negação.)

Mostre que $\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg B$**.**

$\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg(\neg A \wedge B)$ (Lei de De Morgan.)

$\equiv \neg A \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg B)$ (Lei de Demorgan.)

$\equiv \neg A \wedge (A \vee \neg B)$ (Regra da Dupla Negação.)

$\equiv (\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Propriedade distributiva.)

Mostre que $\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

$\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg(\neg A \wedge B)$ (Lei de De Morgan.)

$\equiv \neg A \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg B)$ (Lei de Demorgan.)

$\equiv \neg A \wedge (A \vee \neg B)$ (Regra da Dupla Negação.)

$\equiv (\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Propriedade distributiva.)

$\equiv F \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Pois $A \wedge \neg A$ é falso.)

Provando Equivalências Lógicas

Mostre que $\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg B$**.**

$\neg(A \vee (\neg A \wedge B)) \equiv \neg A \wedge \neg(\neg A \wedge B)$ (Lei de De Morgan.)

$\equiv \neg A \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg B)$ (Lei de Demorgan.)

$\equiv \neg A \wedge (A \vee \neg B)$ (Regra da Dupla Negação.)

$\equiv (\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Propriedade distributiva.)

$\equiv F \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Pois $A \wedge \neg A$ é falso.)

$\equiv \neg A \wedge \neg B$ (Regra do elemento neutro.)