Lógica Formal

Lógica Formal

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

GERSTING, Judith L.,*Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics, 6th ed., 2007.*

ROSEN, Kenneth H., Discrete Mathematics and its applications, 6th ed., 2007.

O caso do advogado de defesa
Se meu cliente é culpado, então a faca estava na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta, ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá em 10 de outubro, então Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá em 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos nós sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente.

O argumento do advogado parece correto? Se você fosse um membro do júri, como votaria?

Lógica Formal

Lógica formal pode ser usada para representar sentenças da língua natural que usamos para comunicar fatos ou informações.

Auxilia na compreenção e na determinação da veracidade de argumentos apresentados.

Proposição

Proposição

é uma sentença que declara um fato, que obrigatoriamente é verdadeiro ou falso, mas não ambos.

Exemplos de proposições:

- Brasília é a capital do Brasil.
- Toronto é a Capital do Canadá.
- $1 + 1 = 2$.
- $2 + 2 = 3$.

Proposição

Proposição

É uma sentença que declara um fato, que obrigatoriamente é verdadeiro ou falso, mas não ambos.

Não são proposições:

- Que horas são?
- Leia isso cuidadosamente.
- $x + 1 = 2$.
- $x + y = z$.

Proposição

Valor-verdade

Toda proposição tem um valor-verdade: ou é verdade ou é falsa.

Proposições podem ser representadas por letras, geralmente são A, B, C, etc.

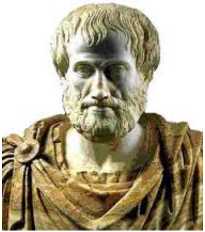
Exemplo:
A: Hoje é sexta-feira.

Uma vez que A representa a proposição "Hoje é sexta-feira", posso dizer que A é verdadeira ou falsa.

Lógica Proposicional

A lógica baseada em proposições é chamada de Cálculo Proposicional ou Lógica Proposicional.

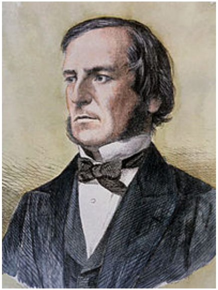
Foi formalizada pelo filósofo Aristóteles, há mais de 2300 anos.



Lógica Proposicinal

Em 1854, o matemático inglês George Boole formalizou métodos para criar novas proposições a partir de proposições existentes.

Proposições compostas são criadas a partir de proposições existentes utilizando-se operadores lógicos.



Negação

A partir de uma proposição A pode-se criar uma nova proposição cujo valor verdade seja o contrário de A.

Tal sentença, chamada de **negação de** A, é denotada por $\neg A$ ou $\overline{A}$ ou A'.

Neste material, a negação de A será denotada por $\neg A$. Lê-se "não A".

Negação

Exemplos: Qual a negação das seguintes proposições:

- Hoje é sexta-feira.
- No mínimo 10mm de chuva caíram hoje em São Paulo.

Negação

Exemplos: Qual a negação das seguintes proposições:

- Hoje é sexta-feira. Hoje não é sexta-feira.
- No mínimo 10mm de chuva caíram hoje em São Paulo.
  Caíram menos que 10 mm de chuva hoje em São Paulo.

Operadores Lógicos

Tabelas verdade são uma forma metódica de expressar o valor verdade de proposições compostas ou alteradas por operadores lógicos.

Considere uma proposição qualquer A. Na tabela, a coluna à esquerda mostra os possíveis valores-verdade de A e a coluna à direita mostra os valores-verdade de $\neg A$.

Tabela verdade da negação

A	$\neg A$
V	F
F	V

Tabelas como essa são chamadas de **Tabela Verdade**.

Conectivos Lógicos

São operadores lógicos que criam novas proposições a partir de duas ou mais sentenças existentes.

Exemplo:

- João foi bem na prova ou precisa estudar mais.

Conectivos Lógicos

São operadores lógicos que criam novas proposições a partir de duas ou mais sentenças existentes.

Exemplo:

- João foi bem na prova ou precisa estudar mais.
- Hoje choveu e fez calor.

Operadores Lógicos

Conectivos Lógicos

São operadores lógicos que criam novas proposições a partir de duas ou mais sentenças existentes.

Exemplo:

- João foi bem na prova ou precisa estudar mais.
- Hoje choveu e fez calor.
- Paulo faltou mas se arrependeu.

Conjunção

É a proposição composta $A \wedge B$. Lê-se "A e B".

Seu valor-verdade é verdadeiro somente quando A é verdadeira e B é verdadeira.

Exemplo: qual a conjunção de "Hoje é sexta-feira." e "Hoje está chovendo."?

Operadores Lógicos

Conjunção

É a proposição composta $A \wedge B$. Lê-se "A e B".

Seu valor-verdade é verdadeiro somente quando A é verdadeira e B é verdadeira.

Exemplo: qual a conjunção de "Hoje é sexta-feira." e "Hoje está chovendo."?

Hoje é sexta-feira e está chovendo.

Tabela-verdade da conjunção

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operadores Lógicos

Atenção: "mas" também é uma conjunção.

Exemplo: O sol está brilhando, mas está chovendo.

A: o sol está brilhando.

B: está chovendo.

Pergunta: Se só A ou só B for verdade, a frase do exemplo será verdade?

Atenção: "mas" também é uma conjunção.

Exemplo: O sol está brilhando, mas está chovendo.

A: o sol está brilhando.

B: está chovendo.

Pergunta: Se só A ou só B for verdade, a frase do exemplo será verdade?

Não!

"O sol está brilhando, mas está chovendo." é uma conjunção:

A: "O sol está brilhando."

B: "Está chovendo."

Tabela-verdade da conjunção

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

É a proposição composta $A \vee B$. Lê-se "A ou B".

Seu valor-verdade é verdadeiro quando pelo menos uma das sentenças é verdadeira.

Exemplo: Maria vai ao cinema com Joana ou ficará em casa ajudando a mãe a fazer bolo.

Exemplo: O céu é azul ou branco. (Observe que pode ser ambos.)

Operadores Lógicos

Exemplo: Qual a disjunção das proposições "Hoje é quarta-feira" e "Amanhã é sábado"?

Operadores Lógicos

Exemplo: Qual a disjunção das proposições "Hoje é quarta-feira" e "Amanhã é sábado"?

Hoje é quarta-feira ou amanhã é sabado.

Operadores Lógicos

Tabela-verdade da disjunção

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção Exclusiva

É a proposição composta $A \oplus B$. Lê-se "A ou exclusivo B".

$A \oplus B$ é verdade se exatamente uma das proposições é verdadeira.

Exemplo: Vou torcer pelo Brasil ou pela Argentina, mas não ambos.

Tabela-verdade da disjunção exclusiva

A	B	$A \oplus B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operadores Lógicos

Quando o conectivo "ou exclusivo" é usado mais que uma vez na mesma sentença consecutivamente, seu valor verdade é definido pela paridade do número de proposições verdadeiras.

Tabela-verdade da disjunção exclusiva

A	B	C	$A \oplus B \oplus C$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

A	B	C	D	$A \oplus B \oplus C \oplus D$
V	V	V	V	F
V	V	V	F	V
V	V	F	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	V	F	F
V	F	F	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	V	V
F	F	F	F	F

Implicação

É a proposição composta $A \to B$, na qual sempre que A for verdade, B será verdade.

Lê-se "se A, então B" ou "A implica B".

Terminologia:

A proposição A é a hipótese, antecedente ou premissa.

A proposição B é a conclusão ou consequência.

A implicação também é chamada de proposição condicional.

Exemplos:

Se eu for eleito, vou diminuir os impostos.

Se você tirar nota 10 na P_1, então terá média final 10.

Tabela verdade da implicação

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Operadores Lógicos

Outras formas de ler a implicação $A \to B$ na língua natural:

- A somente se B.
- se A, B.
- A é suficiente para B.
- B se A.
- B quando ocorrer A.
- uma condição necessária para A é B.
- B a menos que $\neg A$.
- A apenas se B.
- uma condição suficiente para B é A.
- B sempre que A.
- B é necessário para A.

Operadores Lógicos

Quando uma condicional envolve informações de tempo como hoje, amanhã, ontem, agora, etc. ou iformações de lugar, como aqui, lá, nesta cidade, etc., o leitor deve considerar o momento presente e local em que está.

Qual o valor verdade de:

1. Se aqui é uma sala de aula, então $1 + 1 = 3$.

2. Se $1 + 1 = 3$, então amanhã é terça-feira.

Operadores Lógicos

Quando uma condicional envolve informações de tempo como hoje, amanhã, ontem, agora, etc. ou iformações de lugar, como aqui, lá, nesta cidade, etc., o leitor deve considerar o momento presente e local em que está.

Qual o valor verdade de:

1. Se aqui é uma sala de aula, então $1 + 1 = 3$.
   Se você estiver em uma sala de aula quando ler, então é falsa, senão é verdadeira.

2. Se $1 + 1 = 3$, então amanhã é terça-feira.
   É verdadeira, não importa se amanhã é terça-feira ou não.

Operadores Lógicos

Bicondicional

Bicondicional ou biimplicação é a proposição composta $A \leftrightarrow B$, em que o valor-verdade é verdadeiro somente nos casos em que A e B têm o mesmo valor-verdade.

Lê-se A se, e somente se, B.

Exemplos de proposições:

- O quintal fica molhado se, e somente se, chove.
- X é capital do Brasil se, e somente se, X é um distrito federal.
- Seja $z = x + y$.
  - z é par se, e somente se, x e y são pares.
  - z é ímpar se, e somente se, x e y têm paridades distintas.

Tabela verdade do operador bicondicional

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Operadores Lógicos

Agora que você conhece a tabela-verdade da biimplicação, diga qual o valor-verdade de cada um dos exemplos:

- O quintal fica molhado se, e somente se, chove.
- X é capital do Brasil se, e somente se, X é um distrito federal.
- Seja $z = x + y$.
  - z é par se, e somente se, x e y são pares.
  - z é ímpar se, e somente se, x e y têm paridades distintas.

Operadores Lógicos

Agora que você conhece a tabela-verdade da biimplicação, diga qual o valor-verdade de cada um dos exemplos:

- O quintal fica molhado se, e somente se, chove. Falso
- X é capital do Brasil se, e somente se, X é um distrito federal. Falso
- Seja $z = x + y$.
  - z é par se, e somente se, x e y são pares. Falso
  - z é ímpar se, e somente se, x e y têm paridades distintas. Verdadeiro

Operadores Lógicos

Precedência de Operadores Lógicos

Operador	Prioridade
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

(quanto menor o número, mais alta a prioridade)

Fórmulas bem-formadas

Nós podemos usar parênteses e conectivos lógicos para criar proposições compostas:

$$(A \to B) \land (B \to A)$$

Mas é preciso obedecer algumas regras de sintaxe para formar novas proposições. Por exemplo:

$$A)) \land \land \to BC$$

não é uma proposição. Dizemos que não é uma **fórmula bem formada**.

Tabela verdade

Deve-se determinar primeiro os valores-verdades das expressões dentro de parênteses, depois os operadores, em ordem de prioridade:

Exemplo: $A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

Tabela verdade

A	B	$A \vee B$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$A \vee \neg B$	$A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Exemplo: $A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

Tabela verdade

A	B	$A \vee B$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$A \vee \neg B$	$A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Quantas linhas têm a tabela verdade de uma proposição com n variáveis?

Tabela verdade

Exemplo: $A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

Tabela verdade

A	B	$A \vee B$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$A \vee \neg B$	$A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Quantas linhas têm a tabela verdade de uma proposição com n variáveis?
2^n

Contradição

é uma sentença lógica composta cujo valor-verdade é sempre falso.

Exemplo: $(A \rightarrow B) \wedge A \wedge \neg B$ é uma contradição.

Tabela Verdade

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B$	$(A \rightarrow B) \wedge A \wedge \neg B$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	F

Tautologia

Uma **tautologia** é uma sentença lógica cujo valor-verdade é sempre verdade, independente dos valores-verdade das setenças que a compõe.

Exemplo: $A \vee \neg B \rightarrow \neg(\neg A \wedge B)$ é uma tautologia.

Tabela verdade

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$\neg B$	$\neg(\neg A \wedge B)$	$A \vee \neg B$	$A \vee \neg B \rightarrow \neg(\neg A \wedge B)$
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V

Tautologia

Exemplo: $A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$ não é uma tautologia, nem contradição.

A	B	$A \vee B$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$A \vee \neg B$	$A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Tautologias

Como verificar se uma proposição é uma tautologia ou contradição?

Tautologias

Como verificar se uma proposição é uma tautologia ou contradição?

Use tabela verdade!

Tautologias

Teste por Tabela Verdade para verificar se a proposição $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ é uma tautologia:

A	B	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tautologias

Para provarmos que uma implicação $P \to Q$ é uma tautologia, podemos supor que a mesma não é uma tautologia e verificar se isso nos leva a uma situação absurda.

Se chegarmos a uma situação absurda, então é impossível que $P \to Q$ não seja verdade.

Tautologias

Se $P \to Q$ não é uma tautologia, então $P \to Q$ é falso.

O único jeito de $P \to Q$ ser falso, é quando P é verdadeiro e Q é falso, pela tabela verdade da implicação.

Sabendo que P é verdade e Q é falso, nós atribuímos valores-verdade para as suas variáveis proposicionais, satisfazendo essas condições.

Devemos verificar todas as combinações de valores verdade que satisfazem a condição P verdade e Q falso.

Se em todos os casos, alguma variável proposicional for verdadeira e falsa, então chegamos a um absurdo e podemos concluir que $P \to Q$ é uma tautologia.

Algoritmo Testa Tautologia
Entrada: uma fórmula proposicional $P \rightarrow Q$

$P :=$ verdade
$Q :=$ falso
Repita:
Para cada proposição que já tenha valor-verdade definido:
defina o valor verdade de suas componentes.
até todas as variáveis proposicionais terem valor-verdade definido.
Se uma variável proposicional recebeu ambos os valores-verdade:
$P \rightarrow Q$ é uma tautologia.
Senão:
$P \rightarrow Q$ não é uma tautologia.

Tautologias

Vamos verificar se $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ é uma tautologia.

$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ é uma fórmula proposicional na forma $P \to Q$.

$P : A \to B$

$Q : \neg B \to \neg A$

Tautologias

Se $P \to Q$ não é uma tautologia, então $P \to Q$ é falso.

Então P é verdade e Q é falso.

$A \to B$ é verdade.

$\neg B \to \neg A$ é falso.

Tautologias

Se $P : A \rightarrow B$ é verdade, então:

- **Caso P.1:** A é verdade e B é verdade.
- **Caso P.2:** A é falso.

Se $Q : \neg B \to \neg A$ é falso, só há um caso:

Caso Q.1: $\neg B$ é verdade e $\neg A$ é falso.

Observe que no Caso Q.1 B é falso e A é verdade.

Tautologias

Temos que verificar todas as combinações resultantes:

- **Caso P.1:** A é verdade e B é **verdade**; com **Caso Q.1**: A é verdade e B é **falso**.

- **Caso P.2:** A é **falso**; com **Caso Q.1**: A é **verdade** e B é falso.

Como todas as combinações são absurdas, não tem como $P \to Q$ não ser uma tautologia.