Introdução à Teoria dos Grafos

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

J. A. BONDY, U. S. R. MURTY. *Graph Theory with Applications*, 5th ed. 1982.

Reinhard DIESTEL. *Graph Theory*, Electronic ed., 2005.

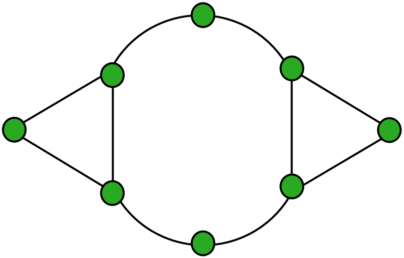
Douglas WEST. *Graph Theory*, 2nd ed., 2001.

O que é Grafo?

Definição formal

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura matemática que consiste de dois conjuntos:

- $V(G)$, um conjunto de elementos que são chamados de vértices,
- $E(G)$, um conjunto de pares de elementos de $V(G)$, cada par é chamado de aresta.

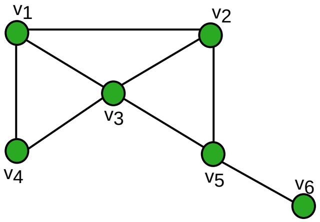


O que é Grafo?

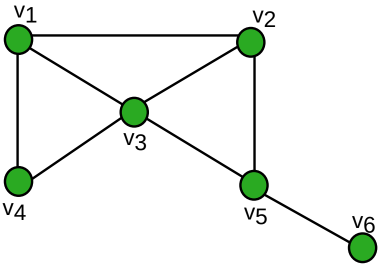
Definição formal

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura matemática que consiste de dois conjuntos:

- $V(G)$, um conjunto de elementos que são chamados de vértices,
- $E(G)$, um conjunto de pares de elementos de $V(G)$, cada par é chamado de aresta.



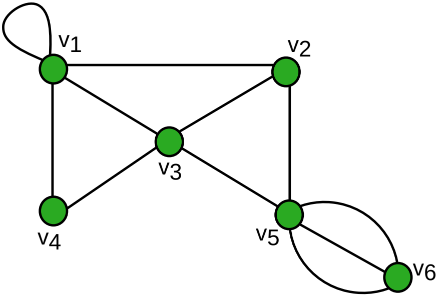
O que é Grafo?



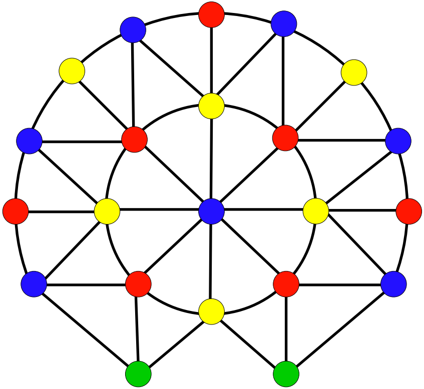
$G = (V(G), E(G))$, onde:

- $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- e $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5, v_5v_6\}$.

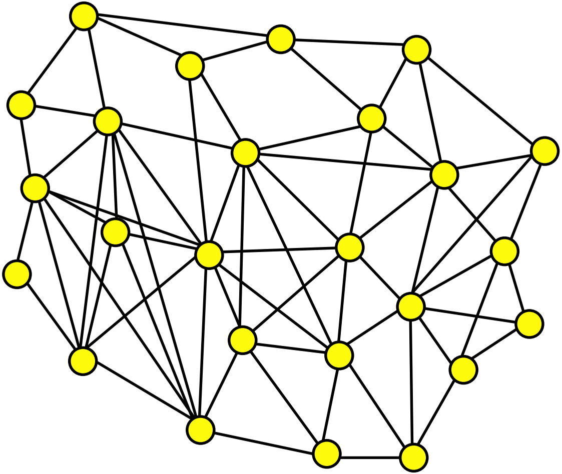
O que é Grafo?



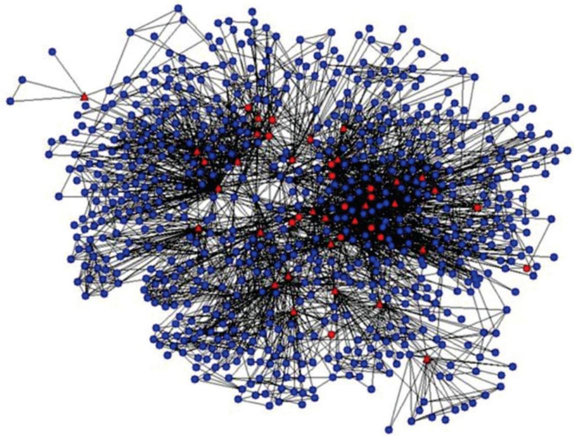
O que é Grafo?



O que é Grafo?



Rede de coautoria do PPGGeo/UFRGS 2004-2006



Legendas			
Cor		Forma	
	Docentes	Δ	Cutpoints
	Não-docentes	○	Não-cutpoints

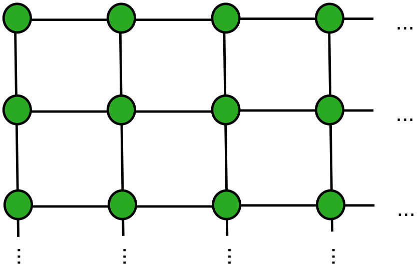
Nota: Elaboração do autor com uso do NetDraw 2.086.

Fonte: LIMA, Maycke Young de. Coautoria na produção científica do PPGGeo/UFRGS: uma análise de redes sociais. Ci. Inf., Brasília , v. 40, n. 1, p. 38-51, Abr. 2011.

O que é Grafo?

O conjunto dos vértices pode ser infinito. Nesse caso o grafo é chamado de grafo infinito.

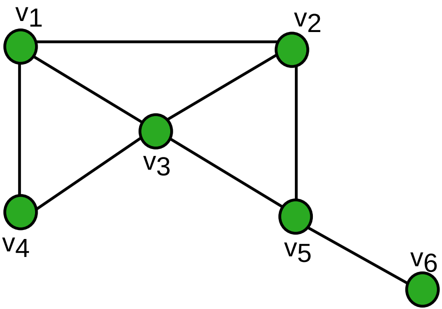
Exemplo: $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G) = \{ij : i, j \in \mathbb{Z}\}$ e $E(G) = \{(ij, i(j+1)) : i, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{(ij, (i+1)j) : i, j \in \mathbb{Z}\}$.



Conceitos básicos

Dois vértices conectados por uma aresta são chamados de *adjacentes* ou *vizinhos*.

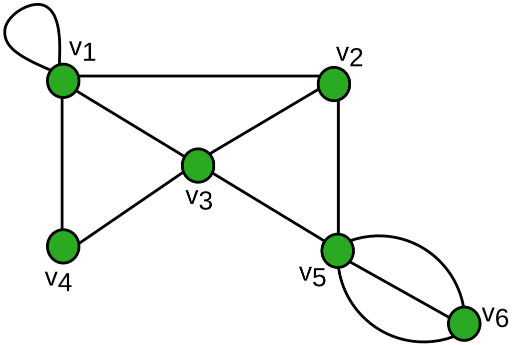
Uma aresta vw é dita *incidente* em v e em w.



Os vértices v_1 e v_4 são vizinhos (ou adjacentes) e a aresta v_1v_4 é incidente nos vértices v_1 e v_4.

Arestas múltiplas: mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices.

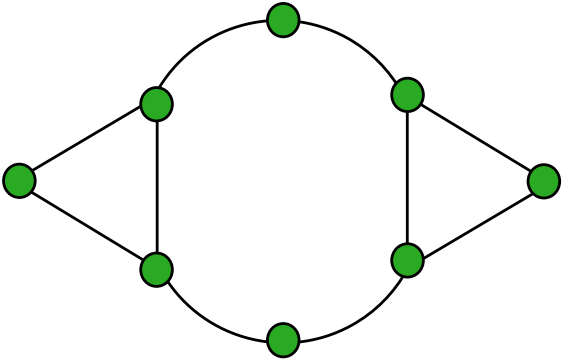
Laço: aresta definida por um par de vértices não distintos.



A aresta $v_1 v_1$ é um laço e entre os vértices v_5 e v_6 temos arestas múltiplas.

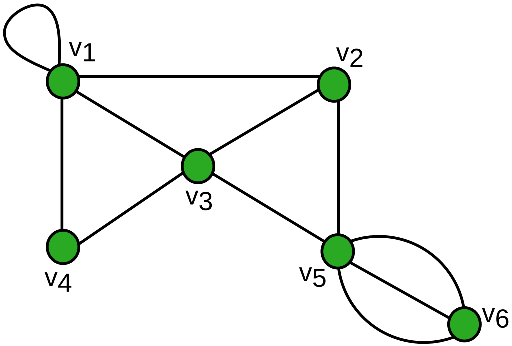
Conceitos básicos

Um grafo é *simples* se não possui laços ou arestas múltiplas.



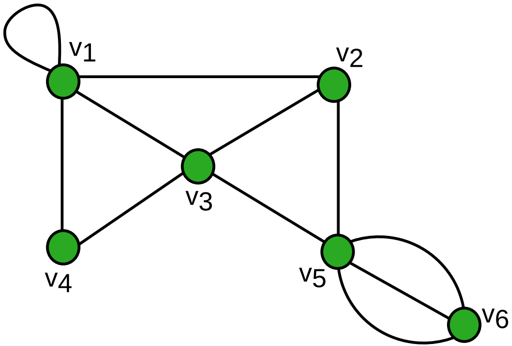
Conceitos básicos

O grau de um vértice é o número de arestas incidentes nele.
(Quando há laço, a aresta deve ser contada duas vezes.)



$d(v_1) = 5 \qquad d(v_2) = 3 \qquad d(v_3) = 4$
$d(v_4) = 2 \qquad d(v_5) = 5 \qquad d(v_6) = 3$

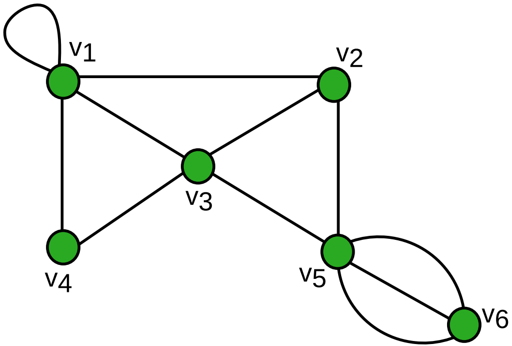
O grau máximo do grafo é o maior dos graus dos vértices.



$\Delta(G) = 5.$

Conceitos básicos

O grau mínimo do grafo é o menor dos graus dos vértices.



$\delta(G) = 2$.

Conceitos básicos

As relações (arestas) entre os elementos (vértices) de um modelo (grafo) podem não ser simétricas.

Exemplos de relações que não são simétricas:

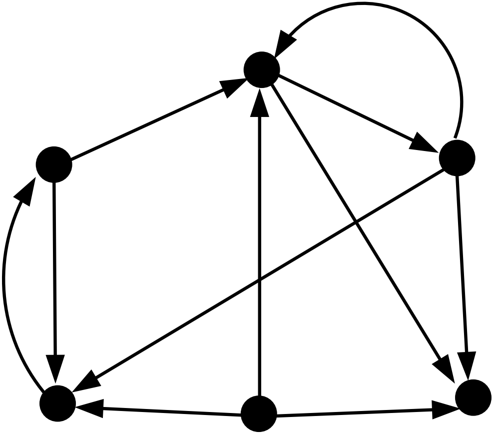
- mapa rodoviário (tem vias com sentido único);
- relação de conhecer um indívíduo (artistas são bastante conhecidos, mas não conhecem todo mundo);
- relação de ser chefe (é uma hierarquia, em geral, alguém é mandado e não é chefe de ningúem).
- Representar relações de preferência entre dois objetos.

Para representar relações assimétricas, as arestas são **pares ordenados** de vértices.

A ordem dos vértices de uma aresta orientada (a, b) indica que o sentido da relação é de a para b.

Uma aresta orientada também é chamada na literatura de **arco**.

Um grafo com orientação nas arestas é chamado de **grafo orientado** ou **digrafo** ou **grafo direcionado**.

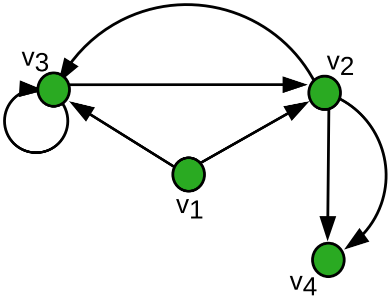


Conceitos básicos

$G = (V(G), E(G))$

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

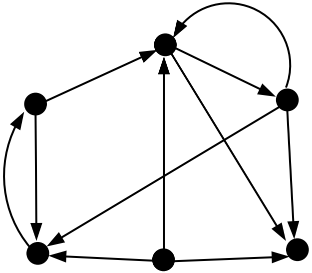
$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_4), (v_2, v_4)\}$



O conceito de grau é diferente em grafos orientados.

O grau de entrada de um vértice é o número de arestas que chegam em v e é denotado por $d^-(v)$.

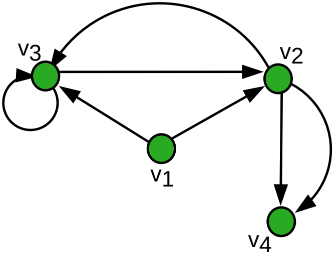
O grau de saída de um vértice é o número de arestas que partem de v em direção a outros vértices, denotado por $d^+(v)$.



Definição

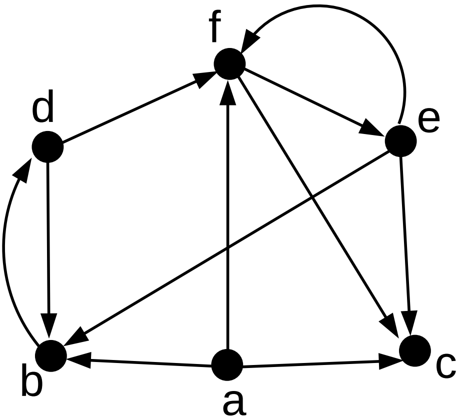
O **grau de entrada** de um vértice v é o número de arestas que chegam em v, denotado por $d^-(v)$.

O **grau de saída** de v é o número de arestas que saem de v, denotado por $d^+(v)$.



$d^-(v_1) = 0$; $d^-(v_2) = 2$, $d^+(v_2) = 3$; $d^-(v_3) = 3$, $d^+(v_3) = 2$.

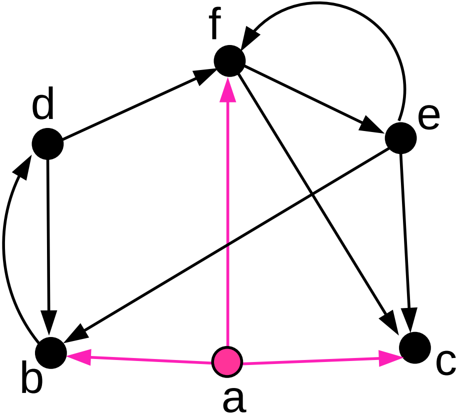
Conceitos Básicos



$d^+(a) = 3$ $d^+(b) = 1$ $d^+(c) = 0$ $d^+(e) = 3$

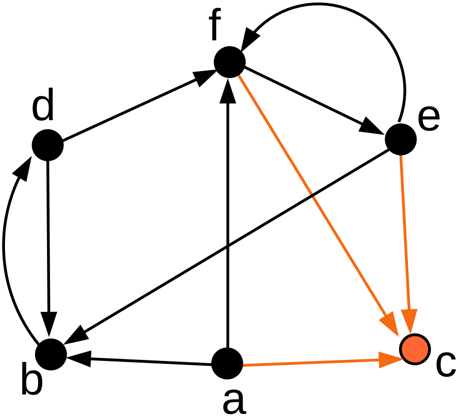
$d^-(a) = 0$ $d^-(b) = 3$ $d^-(c) = 3$ $d^-(e) = 1$

Um vértice com grau de entrada igual a zero é chamado de **fonte**.



Nesse exemplo, *a* é uma fonte.

Um vértice com grau de saída igual a zero é chamado de **sumidouro** ou **sorvedouro**.



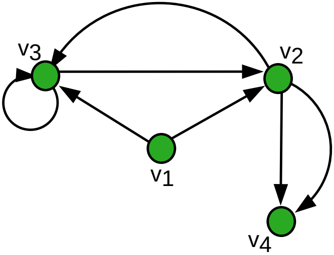
Nesse exemplo, c é um sumidouro.

Conceitos básicos

Definição

Um vértice v é **fonte** quando $d^-(v) = 0$. Exemplo: v_1 é fonte.

Um vértice v é **sorvedouro** quando $d^+(v) = 0$. Exemplo: v_4 é sorvedouro.

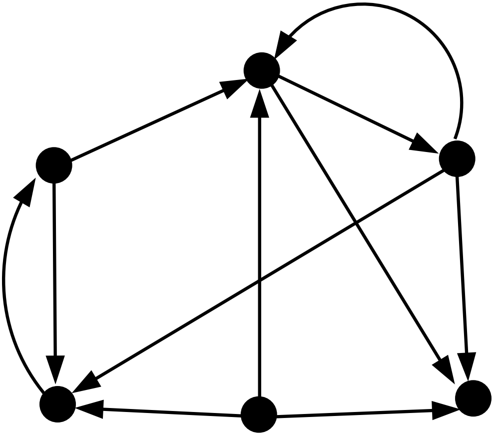


Para representar relações assimétricas, as arestas são **pares ordenados** de vértices.

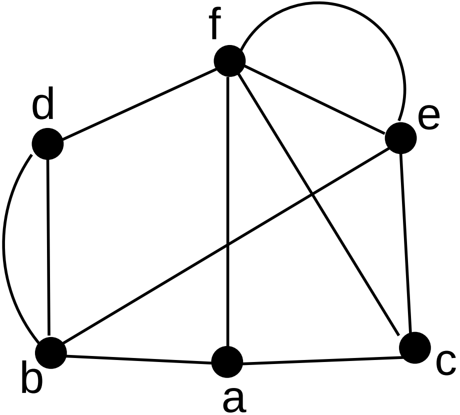
A ordem dos vértices de uma aresta orientada (a, b) indica que o sentido da relação é de a para b.

Uma aresta orientada também é chamada na literatura de **arco**.

Conceitos Básicos



O **grafo subjacente** de um grafo orientado G é o grafo obtido ao se remover a orientação das arestas de G.

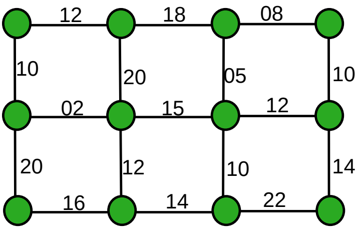


Em alguns casos, é necessário atribuir um custo para o vértice, ou para a aresta ou para ambos.

Por exemplo, podemos querer representar quantos quilômetros de rodovia existem entre quaisquer duas cidades de um mapa rodoviário.

Grafos com valores nos vértices, arestas ou ambos são **grafos ponderados**.

Exemplo de grafo ponderado.

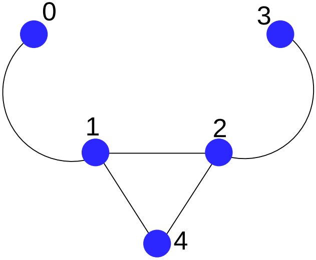


Representação de grafos

As formas mais comum de representação de grafos são:

- **matriz de adjacências:** uma matriz $M_{|V(G)| \times |V(G)|}$, onde $m_{i,j} = 1$ se existe aresta entre $v_i v_j$ e $m_{i,j} = 0$ caso contrário.
- **matriz de incidência:** uma matriz $M_{|V(G)| \times |E(G)|}$, onde $m_{i,j} = 1$ se v_i é um dos vértices da aresta e_j. (dizemos que a aresta e_j incide no vértice v_i)

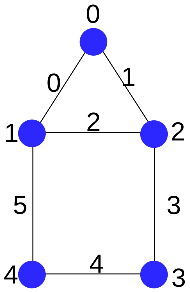
Representação de grafos



Matriz de adjacências:

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	1	0	0

Representação de grafos



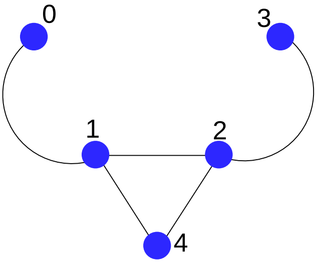
Matriz de incidência:

	0	1	2	3	4
0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	0	0	1	1
5	0	1	0	0	1

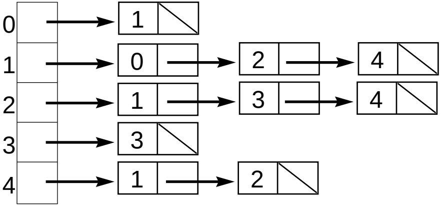
Computacionalmente, além da representação através de matrizes, o grafo pode ser representado por uma *lista de adjacências*.

A estrutura de dados utilizada é um vetor com $|V(G)|$ posições, onde a posição i contém o endereço de uma lista ligada onde cada elemento é um vizinho do vértice i.

Representação de grafos

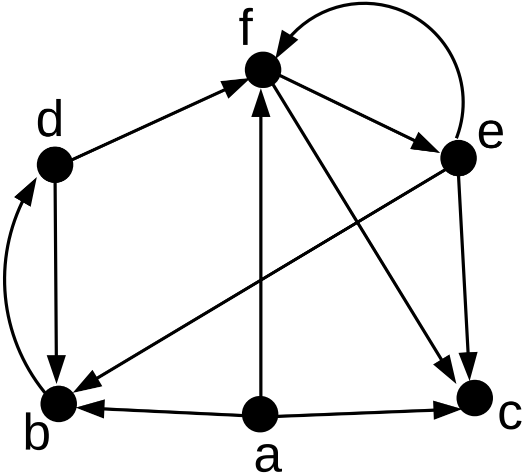


Lista de adjacências:



Representação de Grafos

Rotulação dos vértices para representação computacional:



A matriz de adjacências de um grafo orientado não é necessariamente simétrica.

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	1
b	0	0	0	1	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	1	0	0	0	1
e	0	1	1	0	0	1
f	0	0	1	0	1	0