

Projeto de Algoritmos por Divisão e Conquista

Profa. Sheila Moraes de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

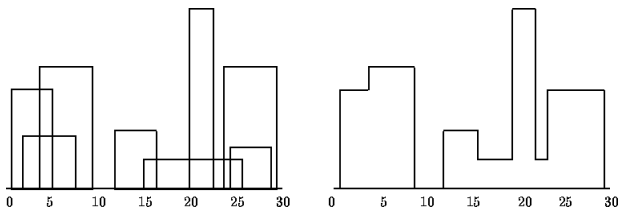
Este material é preparado usando como referência o texto do seguinte livro.

Udi Manber. *Introduction to Algorithms: a creative approach.*, 1st ed., 1989.

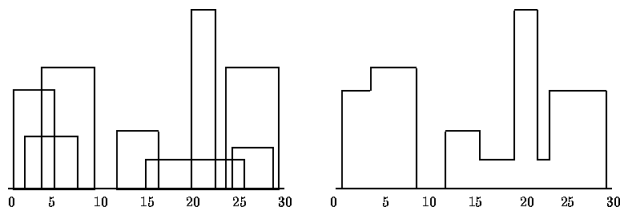
Problema do Skyline

Problema

Dadas as coordenadas de um conjunto de prédios, determinar qual é a silhueta da cidade.



Problema do Skyline



Entrada: (1, 11, 5); (2, 6, 7); (3, 13, 9); (12, 7, 16); (14, 3, 25); (19, 18, 22);
(23, 13, 29); (24, 4, 28)

Saída: (1, 11, 3, 13, 9, 0, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Aula passada: projeto de algoritmos por indução.

Se a entrada é um único prédio (x, y, z) , o skyline são as próprias coordenadas do prédio: $(x, y, z, 0)$.

Suponha que já temos um skyline de n prédios e recebemos mais um. Como incluí-lo no skyline?

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 0, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Como resolver?

Nada se altera até a coordenada inicial do novo prédio!

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 0, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

percorremos as coordenadas do skyline da esquerda para a direita

ignorando as alturas

enquanto o valor da coordenada for menor que a do início do novo prédio

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 0, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 0, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Avaliamos o intervalo que termina na coordenada selecionada. Nesse intervalo é o começo do novo prédio.

Se a altura é maior que a do novo prédio, olhar o próximo intervalo.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 0, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (0) é menor que a do novo prédio (9), verificar se o ponto final do intervalo (12) é menor que o ponto final do prédio (26).

Se sim, substituir a altura do intervalo pela do prédio (9).

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (0) é menor que a do novo prédio (9), verificar se o ponto final do intervalo (12) é menor que o ponto final do prédio (26).

Se sim, substituir a altura do intervalo pela do prédio (9).

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura anterior no skyline é igual à do intervalo atual, apagar a coordenada inicial do intervalo e a altura atual.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Avaliar o próximo intervalo.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (7) é menor que a do novo prédio (9), verificar se o ponto final do intervalo (16) é menor que o ponto final do prédio (26).

Se sim, substituir a altura do intervalo pela do prédio (9).

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 12, 9, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (7) é menor que a do novo prédio (9), verificar se o ponto final do intervalo (16) é menor que o ponto final do prédio (26).

Se sim, substituir a altura do intervalo pela do prédio (9).

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 12, 9, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura anterior no skyline é igual à do intervalo atual, apagar a coordenada inicial do intervalo e a altura atual.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura anterior no skyline é igual à do intervalo atual, apagar a coordenada inicial do intervalo e a altura atual.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Verificar o próximo intervalo.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Verificar o próximo intervalo.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (3) é menor que a do novo prédio (9), verificar se o ponto final do intervalo (19) é menor que o ponto final do prédio (26).

Se sim, substituir a altura do intervalo pela do prédio (9).

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 16, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (3) é menor que a do novo prédio (9), verificar se o ponto final do intervalo (19) é menor que o ponto final do prédio (26).

Se sim, substituir a altura do intervalo pela do prédio (9).

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 16, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura anterior no skyline é igual à do intervalo atual, apagar a coordenada inicial do intervalo e a altura atual.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura anterior no skyline é igual à do intervalo atual, apagar a coordenada inicial do intervalo e a altura atual.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Verificar o próximo intervalo.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Verificar o próximo intervalo.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura no intervalo atual (18) é maior que a do novo prédio (9) e o ponto final do intervalo (22) é menor que a coordenada final do novo prédio (26), nada se altera.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura anterior no skyline é igual à do intervalo atual, apagar a coordenada inicial do intervalo e a altura atual.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Verificar o próximo intervalo

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Verificar o próximo intervalo

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (3) é menor que a do novo prédio (9), verificar se o ponto final do intervalo (23) é menor que o ponto final do prédio (26).

Se sim, substituir a altura do intervalo pela do prédio (9).

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 9, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (3) é menor que a do novo prédio (9), verificar se o ponto final do intervalo (19) é menor que o ponto final do prédio (26).

Se sim, substituir a altura do intervalo pela do prédio (9).

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 9, 23, 13, 29, 0)

Se a altura anterior no skyline é igual à do intervalo atual, apagar a coordenada inicial do intervalo e a altura atual.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 9, 23, 13, 29, 0)

Verificar o próximo intervalo.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 9, 23, 13, 29, 0)

Verificar o próximo intervalo.

Problema do Skyline

novo prédio: (5, 9, 26)

skyline: (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 9, 23, 13, 29, 0)

Se a altura (13) é maior que a do novo prédio (9) e o ponto final do intervalo (29) é maior que o ponto final do prédio (26), terminou.

Problema do Skyline

Observe que o algoritmo indutivo avalia cada intervalo no máximo duas vezes (a segunda é para verificar se a altura do intervalo anterior é igual ao do atual.)

A complexidade do algoritmo que inclui um novo prédio é $O(n)$.

Mas esse algoritmo se repete para incluir cada um dos prédios.

Na primeira vez, avalia zero prédios, depois 1, depois 2, depois 3 ...

Para incluir o n -ésimo prédio, avalia $n - 1$ prédios (considerando o pior caso).

Então a complexidade para resolver o Problema do Skyline com nosso algoritmo projetado por indução é $\sum_{i=0}^{n-1} i \in O(n^2)$.

Divisão e Conquista é uma técnica de projeto de algoritmos que consiste em dividir o problema original em subproblemas, resolver esses subproblemas e combinar essas soluções para obter a solução do problema original.

Dica: Normalmente, os resultados são melhores se você divide o problema original em subproblemas de tamanhos parecidos (iguais, se possível).

Exemplo de algoritmo de Divisão e Conquista: MergeSort ou ordenação por intercalação.

Divisão e Conquista: MergeSort

Você se lembra de como funciona o MergeSort?

Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

84	9	43
----	---	----

84	9
----	---

84	9
----	---

Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

84	9	43
----	---	----

9	
---	--

84	9
----	---



Divisão e Conquista: MergeSort


84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

84	9	43
----	---	----

9	84
---	----

84	
----	--



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

84	9	43
----	---	----

9	84	43
---	----	----

Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

9		
---	--	--

9	84	43
---	----	----

A blue arrow points from the '9' in the first cell of the bottom row to the '9' in the first cell of the row above it.


Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

9	43	
---	----	--

	84	43
--	----	----



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

9	43	84
---	----	----

	84	
--	----	--



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

9	43	84
---	----	----

Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

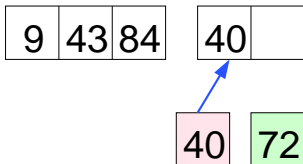
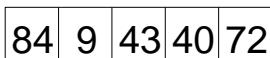
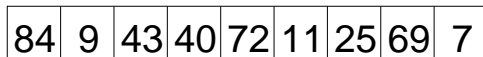
9	43	84
---	----	----

40	72
----	----

40

72

Divisão e Conquista: MergeSort



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

9	43	84
---	----	----

40	72
----	----

↑

	72
--	----

Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

84	9	43	40	72
----	---	----	----	----

9	43	84
---	----	----

40	72
----	----

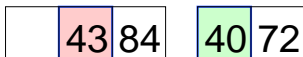
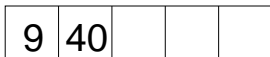
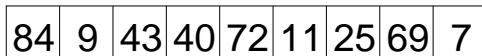
Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

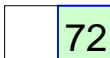
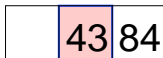
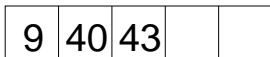
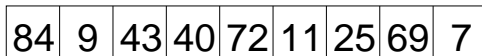
9				
---	--	--	--	--

9	43	84	40	72
---	----	----	----	----

Divisão e Conquista: MergeSort



Divisão e Conquista: MergeSort



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

9	40	43	72	
---	----	----	----	--

		84
--	--	----

	72
--	----



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

9	40	43	72	84
---	----	----	----	----

		84		
--	--	----	--	--



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

9	40	43	72	84
---	----	----	----	----

Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

9	40	43	72	84
---	----	----	----	----

11	25	69	7
----	----	----	---

11	25
----	----

11

25

Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

9	40	43	72	84
---	----	----	----	----

11	25	69	7
----	----	----	---

11	25
----	----

7	
---	--

69

7



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

9	40	43	72	84
---	----	----	----	----

7			
---	--	--	--

11	25
----	----

7	69
---	----



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

9	40	43	72	84
---	----	----	----	----

7	11		
---	----	--	--

11	25
----	----

	69
--	----



Divisão e Conquista: MergeSort

84	9	43	40	72	11	25	69	7
----	---	----	----	----	----	----	----	---

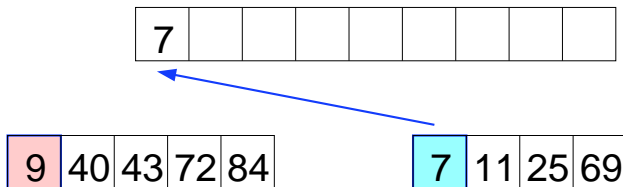
9	40	43	72	84
---	----	----	----	----

7	11	25	
---	----	----	--

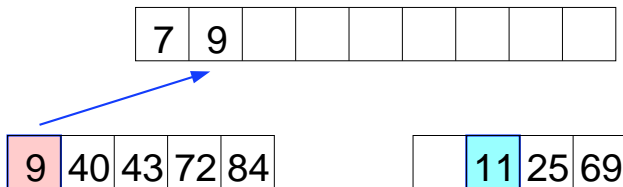
	25
--	----

	69
--	----

Divisão e Conquista: MergeSort



Divisão e Conquista: MergeSort



Divisão e Conquista: MergeSort

7	9	11	25	40	43	69	72	84
---	---	----	----	----	----	----	----	----

Qual a complexidade do MergeSort?

Divisão e Conquista: MergeSort

Qual a complexidade do MergeSort? $O(n \log n)$

Qual a complexidade do MergeSort? $O(n \log n)$

O Problema do Skyline é $O(n^2)$.

Será que conseguimos fazer um algoritmo melhor para o Problema do Skyline usando Divisão e Conquista?

Ideia:

- Dividir o conjunto de prédios em dois.
- Construir o Skyline de cada um dos conjuntos.
- Unir os dois Skylines para construir a solução do problema original.

Problema: Dadas as coordenadas de dois Skylines, como construir um único Skyline?

Exemplo:

$$S_1 = (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 9, 23, 13, 29, 0)$$

$$S_2 = (5, 8, 15, 4, 21, 20, 25, 0)$$

Divisão e Conquista: Problema do Skyline

Problema: Dadas as coordenadas de dois Skylines, como construir um único Skyline?

Exemplo:

$$S_1 = (1, 11, 3, 13, 9, 9, 19, 18, 22, 9, 23, 13, 29, 0)$$

$$S_2 = (5, 8, 15, 4, 21, 20, 25, 0)$$

Valendo 1 ponto no último teste: apresente até o final dessa aula um pseudocódigo de complexidade linear $O(|S_1| + |S_2|)$ para resolver esse problema.

Faça a análise de complexidade do seu pseudocódigo para garantir que ele é linear.