Relações de Recorrência

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

Thomas H. CORMEN, Charles E. LEISERSON, Ronald L. RIVEST, Clifford STEIN. *Introduction to Algorithms*, 2nd ed., 2001.

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).

Udi Manber. *Introduction to Algorithms: a creative approach.*, 1st ed., 1989.

Relações de Recorrência - Exemplo 1

Considere o seguinte problema:

Número de bactérias na colônia

- O número de bactérias em uma colônia dobra a cada hora.
- A colônia se iniciou com 5 bactérias.
- Quantas bactérias existirão em n horas?

Seja a_n o número de bactérias após n horas.

- O número de bactérias em uma colônia dobra a cada hora.
  Então para qualquer a_n, sabemos que $a_n = 2a_{n-1}$.

- A colônia se iniciou com 5 bactérias.
  Então sabemos que $a_0 = 5$

- Quantas bactérias existirão em n horas?
  É possível construirmos uma fórmula para determinar o valor de a_n?

Relações de Recorrência - Exemplo 1

$$a_n = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0, \\ 2a_{n-1}, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

É uma **relação de recorrência**.

Relações de Recorrência - Definição

Relação de Recorrência

Uma relação de recorrência para uma sequência a_n é uma equação que expressa a_n a partir

- dos primeiros termos da sequência (um ou mais primeiros termos); e
- de uma regra para determinar os próximos termos a partir daqueles que os precedem.

Dizemos que uma sequência **satisfaz a relação de recorrência** quando seus termos obedecem a regra da relação de recorrência.

Dizemos que uma equação **é uma solução para a relação de recorrência** se, para todo n, a equação calcula o mesmo termo a_n que a regra da relação de recorrência.

Relações de Recorrência - Exemplo 2

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0, \\ 5, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Quais os valores de a_2 e a_3?

Relações de Recorrência - Exemplo 2

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0, \\ 5, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Quais os valores de a_2 e a_3?

$a_2 = a_{2-1} - a_{2-2} = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2.$

$a_3 = a_{3-1} - a_{3-2} = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3.$

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 3n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 3n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 3n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 2[3n-3] - (3n-6) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n$.

Portanto, sim! $a_n = 3n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 2^n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Pergunta: $a_n = 2^n$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 2^n$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[2^{n-1}] - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} = (2^2)(2^{n-2}) - 2^{n-2} = 3(2^{n-2})$.

Então quando $n = 2$ temos: $2^n = 2^2 = 3(2^{n-2}) = 3(2^0)$, ou seja, $4 = 3$, que é falso!

Portanto, não! $a_n = 2^n$ não é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Pergunta: $a_n = 5$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Relações de Recorrência - Exemplo 3

Pergunta: $a_n = 5$, para todo inteiro não-negativo n, é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$?

Suponha que $a_n = 5$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Então, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(5) - 5 = 5$.

Portanto, sim! $a_n = 5$ é solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Observação

A determinação dos termos iniciais é que define unicamente a sequência de uma relação de recorrência.

Relações de Recorrência - Exemplo 4

Problema de Fibonacci

- Um jovem casal de coelhos é colocado em uma ilha.
- Um casal de coelhos não procria até que eles tenham dois meses de idade.
- Depois que eles completam dois meses de idade, cada casal de coelhos produz outro casal todo mês.
- Suponha que nenhum coelho morra, encontre a relação de recorrência para o número de casais de coelhos na ilha após n meses.

Relações de Recorrência - Exemplo 4

- Um jovem casal de coelhos é colocado em uma ilha.
  $a_0 = 1$

- Um casal de coelhos não procria até que eles tenham dois meses de idade.
  $a_1 = 1$.

- Depois que eles completam dois meses de idade, cada casal de coelhos produz outro casal todo mês.
  - todos que existiam no mês passado contam. São a_{n-1}.
  - todos os casais que existem a pelo menos dois meses se reproduzem e criam mais um casal cada.

    Quantos casais existem há pelo menos dois meses?

    .

  -

- Depois que eles completam dois meses de idade, cada casal de coelhos produz outro casal todo mês.
    - todos que existiam no mês passado contam. São a_{n-1}.
    - todos os casais que existem a pelo menos dois meses se reproduzem e criam mais um casal cada.

      Quantos casais existem há pelo menos dois meses? a_{n-2}

      Então são criados a_{n-2} novos casais.
    - Somando todos: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Relações de Recorrência - Exemplo 4

Relação de recorrência para o Problema de Fibonacci:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 1, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Um jogo com:

- três pinos;
- um conjunto de discos;

Começo do jogo: os discos estão dispostos no pino mais a esquerda, em ordem decrescente de tamanho (o maior embaixo).

Relações de Recorrência - Exemplo 5

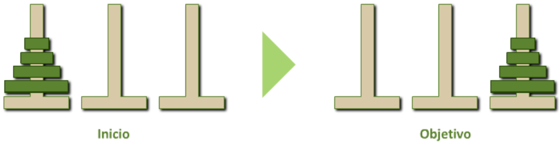
Cada movimento permite ter somente um disco fora dos pinos.

Relações de Recorrência - Exemplo 5

Cada disco pode ser retirado de um pino e colocado em outro.

Não é permitido um disco ser colocado sobre outro menor que ele.

Relações de Recorrência - Exemplo 5



O objetivo é transferir a torre toda do pino da esquerda para o pino da direita.

Relações de Recorrência - Exemplo 5

Problema das Torres de Hanoi

Encontre uma relação de recorrência para determinar o número de movimentos necessários para transferir uma torre com n discos.

Relações de Recorrência - Exemplo 5

Com 1 disco: 1 movimento.

Com dois discos: 3 movimentos.

Com n discos:

- número de movimentos necessários para mover os $n-1$ primeiros discos para o pino do meio
- mais um movimento para mover o maior disco para o pino da direita
- mais número de movimentos para mover os $n-1$ discos do pino do meio para o pino da direita.
- Somando tudo: $2a_{n-1}+1$.

Relação de recorrência para o Problema das Torres de Hanoi:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 2a_{n-1} + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Relações de Recorrência - Exemplo 5

Resolva a relação de recorrência do Problema das Torres de Hanoi:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 2a_{n-1} + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Método iterativo:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 =$$

$$2^2(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = \ldots$$

$$2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 =$$

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 =$$

$$2^n - 1$$

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Problema das sequências de bits de tamanho n sem zeros consecutivos

Qual a relação de recorrência que determina o número de sequências de bits de tamanho n que não possuem dois zeros consecutivos?

para $n = 1$, há duas sequências:

- 0
- 1

Observe que nenhuma possui zeros consecutivos.

Então $a_1 = 2$

para $n = 2$, há quatro sequências:

- 00
- 01
- 10
- 11

Observe que uma delas possui dois zeros consecutivos.

Então $a_2 = 3$

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Para n bits, há dois casos:

- Caso 1: a sequência tem n bits e termina com um bit 1.
- Caso 2: a sequência tem n bits e termina com um bit 0.

Para n bits, há dois casos:

- Caso 1: a sequência tem n bits e termina com um bit 1.
  Se a sequência termina com um bit 1, então o penúltimo bit pode ser 0 ou 1, tanto faz.

  Então todas as sequências com $n - 1$ bits que não possuem zeros consecutivos quando concatenadas com um bit 1 estão nesse caso.

  Então o número de sequências nesse caso é a_{n-1}.

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Para n bits, há dois casos:

- Caso 2: a sequência tem n bits e termina com um bit 0.
  Se a sequência termina com um bit zero, então o penúltimo bit não pode ser zero, tem que ser 1.

  Então os dois últimos bits da sequência são 10.

  Então basta considerar todas as sequências com $n - 2$ bits que não possuem dois zeros consecutivos e concatenar cada uma delas com a sequência 10.

  Observe que mesmo se a sequência com $n - 2$ bits terminar em zero não haverá problemas: XXXXXXX0 $\rightarrow$ XXXXXXX010.

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Para n bits, há dois casos:

- Caso 2: a sequência tem n bits e termina com um bit 0.
  Se a sequência termina com um bit zero, então o penúltimo bit não pode ser zero, tem que ser 1.

  Então os dois últimos bits da sequência são 10.

  Então basta considerar todas as sequências com $n-2$ bits que não possuem dois zeros consecutivos e concatenar cada uma delas com a sequência 10.

  Então o número de sequências nesse caso é o número de sequências com $n-2$ bits que não têm dois zeros consecutivos, ou seja, a_{n-2}.

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Para n bits, há dois casos:

- Caso 1: a sequência tem n bits e termina com um bit 1. $\rightarrow a_{n-1}$
- Caso 2: a sequência tem n bits e termina com um bit 0. $\rightarrow a_{n-2}$

Total de sequências: $a_{n-1} + a_{n-2}$.

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Relação de recorrência para o problema do número de sequências com n bits sem zeros consecutivos:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1, \\ 3, & \text{se } n = 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Relação de recorrência para o problema do número de sequências com n bits sem zeros consecutivos:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1, \\ 3, & \text{se } n = 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Qual o valor de a_5?

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Relação de recorrência para o problema do número de sequências com n bits sem zeros consecutivos:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1, \\ 3, & \text{se } n = 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

$a_5 = a_4 + a_3$
$a_4 = a_3 + a_2$
$a_3 = a_2 + a_1$
$a_2 = 3$
$a_1 = 2$

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Relação de recorrência para o problema do número de sequências com n bits sem zeros consecutivos:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1, \\ 3, & \text{se } n = 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

$a_5 = a_4 + a_3$
$a_4 = a_3 + a_2$
$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$
$a_2 = 3$
$a_1 = 2$

Relações de Recorrência - Exemplo 6

Relação de recorrência para o problema do número de sequências com n bits sem zeros consecutivos:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1, \\ 3, & \text{se } n = 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

$a_5 = a_4 + a_3$
$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$
$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$
$a_2 = 3$
$a_1 = 2$

Relação de recorrência para o problema do número de sequências com n bits sem zeros consecutivos:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1, \\ 3, & \text{se } n = 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$
$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$
$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$
$a_2 = 3$
$a_1 = 2$

Relações de Recorrência - Exemplo 7

Problema da Enumeração de Códigos

- Suponha um sistema computacional que considera um código decimal válido se, e só se, o código possui um número par de zeros.
- Exemplo: 4789034908 é válido   82084020 não é válido.
- Quantos códigos decimais com n dígitos são válidos nesse sistema computacional?

Relações de Recorrência - Exemplo 7

Para $n = 1$:

há 9 códigos válidos

há um código inválido: 0

Para $n = 2$:

Qualquer código válido com 1 dígito concatenado com qualquer dígito que não seja zero: 9^2 possibilidades.

Qualquer código inválido com um dígito mais o dígito zero: 00 1 possibilidade.

Relações de Recorrência - Exemplo 7

Para uma sequência com n dígitos:

Qualquer código válido com $n-1$ dígitos concatenado com qualquer dígito que não seja zero: $9a_{n-1}$ possibilidades.

Qualquer código inválido com $n-1$ dígitos mais o dígito zero.

Pergunta: Quantos códigos inválidos com $n-1$ dígitos existem?

Para uma sequência com n dígitos:

Qualquer código válido com $n-1$ dígitos concatenado com qualquer dígito que não seja zero: $9a_{n-1}$ possibilidades.

Qualquer código inválido com $n-1$ dígitos mais o dígito zero.

Pergunta: Quantos códigos inválidos com $n-1$ dígitos existem?

Todos menos os válidos! Quantos códigos com $n-1$ dígitos existem?

Para uma sequência com n dígitos:

Qualquer código válido com $n-1$ dígitos concatenado com qualquer dígito que não seja zero: $9a_{n-1}$ possibilidades.

Qualquer código inválido com $n-1$ dígitos mais o dígito zero.

Pergunta: Quantos códigos inválidos com $n-1$ dígitos existem?

Todos menos os válidos! Quantos códigos com $n-1$ dígitos existem? 10^{n-1}.

Para uma sequência com n dígitos:

Qualquer código válido com $n - 1$ dígitos concatenado com qualquer dígito que não seja zero: $9a_{n-1}$ possibilidades.

Qualquer código inválido com $n - 1$ dígitos mais o dígito zero.

Pergunta: Quantos códigos inválidos com $n - 1$ dígitos existem?
$10^{n-1} - a_{n-1}$

Todos menos os válidos! Quantos códigos com $n - 1$ dígitos existem?
10^{n-1}.

Relações de Recorrência - Exemplo 7

Para uma sequência com n dígitos:

Qualquer código válido com $n-1$ dígitos concatenado com qualquer dígito que não seja zero: $9a_{n-1}$ possibilidades.

Qualquer código inválido com $n-1$ dígitos mais o dígito zero.
$10^{n-1} - a_{n-1}$ possibilidades.

Total de códigos válidos com n dígitos:
$9a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1} = 10^{n-1} + 8a_{n-1}$.

Número de códigos decimais com quantidade par de dígitos iguais a zero:

$$a_n = \begin{cases} 9, & \text{se } n = 1, \\ 8a_{n-1} + 10^{n-1}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Determinação a partir dos primeiros termos da sequência

Considere a relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0, \\ 2T(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Determinação a partir dos primeiros termos da sequência

O método da determinação a partir dos primeiros termos da sequência consiste em identificar um padrão para a relação de recorrência ao se conhecer os valores inciais da sequencia.

Vejamos o que acontece com os primeiros termos na relação de recorrência apresentada:

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
0	5	5
1	$2 \cdot (5)$	$2 \cdot 5$
2	$2 \cdot (2 \cdot (5))$	$2^2 \cdot 5$
3	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5)))$	$2^3 \cdot 5$
4	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5))))$	$2^4 \cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2(\ldots 2 \cdot (5))))$	?

Determinação a partir dos primeiros termos da sequência

Observe que neste caso o valor de n coincide com o expoente em $T(n)$:

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
0	5	5
1	$2 \cdot (5)$	$2^1 \cdot 5$
2	$2 \cdot (2 \cdot (5))$	$2^2 \cdot 5$
3	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5)))$	$2^3 \cdot 5$
4	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5))))$	$2^4 \cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2(\ldots 2 \cdot (5))))$	?

Observando, podemos criar uma hipótese sobre a fórmula fechada para $T(k)$, onde k é um inteiro positivo qualquer:

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
0	5	5
1	$2 \cdot (5)$	$2^1 \cdot 5$
2	$2 \cdot (2 \cdot (5))$	$2^2 \cdot 5$
3	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5)))$	$2^3 \cdot 5$
4	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (5))))$	$2^4 \cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2(\ldots 2 \cdot (5))))$	$2^k \cdot 5$

Determinação a partir dos primeiros termos da sequência

Para garantir que nossa hipótese é correta, podemos prová-la por indução.

Hipótese de indução: a solução da recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0, \\ 2T(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

é $T(n) = 2^n \cdot 5$.

Base: está no slide anterior.

Passo da indução: Devemos provar que $T(n+1) = 2^{n+1} \cdot 5$.

Primeiro, observe que pela definição da relação de recorrência, $T(n+1) = 2T(n)$.

Pela hipótese de indução, $T(n) = 2^n \cdot 5$.

Substituindo a fórmula da hipótese na definição de $T(n+1)$, temos:

$$T(n+1) = 2T(n) = 2 \cdot (2^n \cdot 5) = 2^{n+1} \cdot 5$$

Visto que a fórmula da nossa hipótese também responde corretamente para o caso $n+1$, pode-se concluir que trata-se de uma fórmula fechada para a relação de recorrência dada. $\square$

Expansão da Relação de Recorrência

Considere a mesma relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } n = 0, \\ 2T(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

O método da expansão consiste em substituir os termos da relação de recorrência pela fórmula dos mesmos em função de termos anteriores e, por fim, criar uma hipótese para a fórmula fechada.

Vejamos o que acontece na expansão da relação de recorrência apresentada:

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
$T(n) =$	$2T(n-1)$	$2^1T(n-1)$
$=$	$2(2T(n-2))$	$2^2T(n-2)$
$=$	$2(2(2T(n-3)))$	$2^3T(n-3)$
$=$	$2(2(2(2T(n-4))))$	$2^4T(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$=$	$2(2(2(2\ldots 2T(0))))$	$2^?T(0)$

Expansão da Relação de Recorrência

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
$T(n) =$	$2T(n-1)$	$2^1 T(n-1)$
$=$	$2(2T(n-2))$	$2^2 T(n-2)$
$=$	$2(2(2T(n-2)))$	$2^3 T(n-3)$
$=$	$2(2(2(2T(n-2))))$	$2^4 T(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$=$	$2(2(2(2\ldots 2T(1))))$	$2^k T(n-k)$

Resta saber qual o valor de k para que a fórmula seja escrita em função de $T(0)$.

Isso vai acontecer quando $n-k=0$. Então $k=n$.

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
$T(n) =$	$2T(n-1)$	$2^1 T(n-1)$
$=$	$2(2T(n-2))$	$2^2 T(n-2)$
$=$	$2(2(2T(n-2)))$	$2^3 T(n-3)$
$=$	$2(2(2(2T(n-2))))$	$2^4 T(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$=$	$2(2(2(2 \dots 2T(0))))$	$2^k T(n-k)$

Quando $k = n$: $T(n) = 2^n T(n-(n)) = 2^n T(0) = 2^n \cdot 5$.

n	$T(n)$	$T(n)$ *reorganizado*
$T(n) =$	$2T(n-1)$	$2^1 T(n-1)$
$=$	$2(2T(n-2))$	$2^2 T(n-2)$
$=$	$2(2(2T(n-2)))$	$2^3 T(n-3)$
$=$	$2(2(2(2T(n-2))))$	$2^4 T(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$=$	$2(2(2(2 \ldots 2T(0))))$	$2^k T(n-n)$

Hipótese: $T(n) = 2^n \cdot 5.$

Expansão da Relação de Recorrência

Para garantir que nossa hipótese é correta, podemos prová-la por indução.

Lembre-se que já fizemos essa prova hoje!

Considere o a relação de recorrência da série de Fibonacci:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 1, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Se nós computarmos $F(k)$ utilizando essa definição, serão necessários $k - 2$ passos.

É mais conveniente ter uma **expressão na forma fechada** para $F(n)$.

Uma "expressão na forma fechada"é a "solução para a relação de recorrência."

Uma solução da relação de recorrência é uma fórmula capaz de computar $F(k)$ em 1 (um) passo.

"Tentar adivinhar uma solução pode parecer um método não-científico, mas, deixando o nosso orgulho de lado, funciona muito bem para uma ampla classe de relações de recorrência. Funciona ainda melhor quando não estamos tentando achar a solução exata, mas um limite superior."

U. Mamber

Considere a seguinte relação de recorrência, definida somente para potências de 2:

$$\begin{cases} T(2) = 1, \\ T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1, \quad \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Observe que essa recorrência apresenta uma desigualdade.

Nós queremos apenas achar um limite superior para a relação de recorrência.

Queremos achar uma resposta na forma $T(n) \in O(f(n))$.

Também queremos que não haja uma diferença muito grande entre $T(n)$ e $f(n)$. (Queremos um limite superior justo.)

Palpite para $f(n)$: $f(n) = n^2$.

Vamos provar que $T(n) \in O(n^2)$ por indução.

Base: $T(2) = 1 \leq f(2) = 2^2 = 4$

Por **hipótese de induação**, suponha que $T(n) \leq n^2$.

Na hipótese, n é uma potência de 2.

No temos que considerar a próxima potência de 2, ou seja, $2n$.

Temos que provar que se a hipótese é verdadeira, então $T(2n) \leq (2n)^2$.

Passo: $T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$ (pela definição da relação de recorrência)

Por hipótese de indução, $T(n) \leq n^2$, então:

$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1 \leq 2n^2 - 2n - 1.$

Como $n > 0$, temos:

$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1 \leq 2n^2 - 2n - 1 \leq 2n^2 < 2n^2 = (2n)^2.$

Portanto, $T(n) \in O(n^2)$.

$$\begin{cases} T(2) = 1, \\ T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Pergunta: $f(n) = n^2$ é uma boa estimativa para $T(n)$?

Relações de recorrência: Palpite Inteligente

No final da demonstração:

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1 \leq 2n^2 - 2n - 1 \leq 2n^2 < 2n^2 = (2n)^2$$

nós substituimos $2n^2 - 2n - 1$ por $4n^2$.

$4n^2$ é bem maior!

Talvez o nosso palpite (n^2) tenha sido muito alto.

Vamos tentar um palpite mais justo: $f(n) = cn$, para alguma constante c positiva.

Vamos tentar um palpite mais justo: $f(n) = cn$, para alguma constante c positiva.

$$\begin{cases} T(2) = 1, \\ T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

No passo vamos ter que provar que $T(2n) \leq c(2n)$.

Mas $T(2n) = 2T(n) + (2n - 1)$, e pela hipótese:

$$T(2n) = 2T(n) + (2n - 1) \leq 2(cn) + (2n - 1) = c(2n) + (2n - 1)$$

Queremos provar que $T(2n) \leq c(2n)$.

Veja que não há como, pois $(2n - 1) > 0$ para todo $n \geq 1$.

Podemos concluir que $T(n)$ é algo entre cn e n^2.

$$\begin{cases} T(2) = 1, \\ T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Vamos tentar $T(n) \leq n \log_2 n$.

Base: $T(2) = 1 \leq 2 \log_2 2 = 2$

Suponha, por **hipótese de indução**, que $T(n) \leq n \log_2 n$.

Passo: Por definição da relação de recorrência, $T(2n) = 2T(n) + 2n - 1$.

Pela hipótese de indução:

$T(2n) = 2T(n) + 2n - 1 \leq 2(n \log_2 n) + 2n - 1$

Como $\log_2 2 = 1$, podemos fazer:
$T(2n) = 2T(n) + 2n - 1 \leq 2(n \log_2 n) + 2n - 1 = 2(n \log_2 n) + 2n - 1 =$
$2(n \log_2 n) + 2n \log_2 2 - 1 < 2(n \log_2 n) + 2n \log_2 2 =$

$2(n \log_2 n) + 2n \log_2 2 = 2n(log_2 n + \log_2 2) = 2n \log_2(2n)$.

Relações de recorrência: Palpite Inteligente

A relação de recorrência:

$$\begin{cases} T(2) = 1, \\ T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1, \quad \text{se } n > 2. \end{cases}$$

é definida somente para potências de 2.

Como definir uma relação de recorrência similar para qualquer valor de n?

Relações de recorrência: Palpite Inteligente

Definição de uma relação de recorrência similar para qualquer valor de n:

$$\begin{cases} T(2) = 1, \\ T(n) \leq 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2n - 1, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Observe que quando n é uma potência de 2 o resultado permanece o mesmo.

$$\begin{cases} T(2) = 1, \\ T(n) \leq 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2n - 1, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Então, já sabemos que valores de n que são potências de 2, $T(n) \in O(n \log n)$.

Será que esse resultado se aplica para qualquer valor de n?

$T(n)$ é uma função monótona crescente.

Então, quando n não é uma potência de 2, a função $T(n)$ é no máximo $T(2^k)$, para algum k.

Mais ainda: $T(2^{k-1}) \leq T(n) \leq T(2^k)$

Já provamos que $T(2^k) \leq c2^k \log_2(2^k)$, para alguma constante c positiva.

Então, $T(n) \leq c2^k \log_2(2^k) \leq c(2n)\log_2(2n) \leq (2c)n\log_2 n^2$, para $n \geq 2$.

Então,
$T(n) \leq c2^k \log_2(2^k) \leq c(2n)\log_2(2n) \leq (2c)2n\log_2 n = (4c)n\log_2 n$, com constante $c_1 = 4c$.

Portanto, $T(n) \in O(n \log n)$, para todo natural positivo n.

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes é da forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \ldots + c_k a_{n-k} + c_{k+1}$$

Lembre-se:

- o valor de k é o grau dessa relação de recorrência.
- se $c_{k+1} = 0$, ou seja, se todos as parcelas estão em função de termos anteriores, então a relação de recorrência é dita **homogênea**.

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos procurar uma solução para a relação de recorrência

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

na forma $a_n = r^n$.

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Observação:

$a^n = r^n$ é solução para a a relação de recorrência

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

se, e somente se,

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + c_3 r^{n-3} + \ldots + c_k r^{n-k}$$

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Dividindo ambos os lados da equação

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + c_3 r^{n-3} + \ldots + c_k r^{n-k}$$

por r^{n-k}, temos:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + c_3 r^{k-3} + \ldots + c_k$$

Equação Característica

A equação

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - c_3 r^{k-3} - \ldots - c_k = 0$$

é chamada de **equação característica**.

Suas raízes são chamadas de **raízes características**.

Observe que o grau dessa equação é o mesmo grau da relação de recorrência:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

Teorema 1

Considere a equação característica $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, onde:

- c_1 e c_2 são números reais, e
- $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ possui duas raízes características distintas, r_1 e r_2.

A solução para a relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ é:

$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, com $n \geq 0$ inteiro e α_1 e α_2 constantes.

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

Então o que devemos fazer para resolver uma relação de recorrência linear homogênea de segundo grau com coeficientes constantes?

A relação de recorrência tem o n-ésimo termo dado por:
$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$.

Então sua equação característica é: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Resolva a equação característica.

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

Se encontrar duas raízes distintas r_1 e r_2, então a solução da relação de recorrência é:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

.

Falta determinar os valores de α_1 e α_2.

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

É uma relação de recorrência de segundo grau. Portanto, é escrita em função dos termos anteriores a_{n-1} e a_{n-2}.

Então, a definição da relação de recorrência deve conter os valores dos dois primeiros termos, a_0 e a_1, de forma que se possa calcular o próximo.

$$a_0 = \alpha_1 r_1^0 + \alpha_2 r_2^0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = \alpha_1 r_1^1 + \alpha_2 r_2^1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$$

Para encontrar α_1 e α_2, resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & a_0 \\ \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = & a_1 \end{cases}$$

Exemplo: Resolva a relação de recorrência:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 0, \\ 7, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} + 2a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Primeiro, devemos encontrar a equação característica:

coeficiente de a_{n-1}: 1

coeficiente de a_{n-2}: 2

equação característica: $r^2 - 1r - 2 = 0.$

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

equação característica: $r^2 - 1r - 2 = 0.$

Resolvendo a equação, encontramos as **raízes características:** $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$.

Então a solução é $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$.

Falta saber quanto valem α_1 e α_2.

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

Para encontrar os valores de α_1 e α_2, resolvemos o sistema com valores de r_1, r_2, a_0 e a_1:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & a_0 \\ \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = & a_1 \end{cases}$$

Como $a_0 = 2$, $a_1 = 7$, $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$, temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = & 7 \end{cases}$$

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = & 7 \end{cases}$$

Então $\alpha_2 = 2 - \alpha_1$.

Substituindo α_2 na segunda equação: $2\alpha_1 - (2 - \alpha 1) = 7$.

Então $3\alpha_1 = 7 + 2$. Logo $\alpha_1 = 3$.

Logo, $\alpha_2 = 2 - \alpha_1 = 2 - 3 = -1$

A solução da relação de recorrência é $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$a_n = 3 \cdot 2^n - 1 \cdot (-1)^n$.

E se a equação característica tiver apenas uma raiz?

Teorema 2

Considere a equação característica $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, onde:

- c_1 e c_2 são números reais,
- e $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ possui exatamente uma raiz característica, r_0.

A solução para a relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ é

$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, com $n \geq 0$ inteiro e α_1 e α_2 constantes

Exemplo: Resolva a relação de recorrência a seguir.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 6, & \text{se } n = 1, \\ 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Primeiro, devemos encontrar a equação característica:

coeficiente de a_{n-1}: 6

coeficiente de a_{n-2}: -9

equação característica: $r^2 - 6r + 9 = 0.$

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

equação característica: $r^2 - 6r + 9 = 0$.

Resolvendo a equação, encontramos uma única raiz: $r_0 = 3$.

Então a solução é $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$.

Falta saber quanto valem α_1 e α_2.

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

Para encontrar os valores de α_1 e α_2, resolvemos o sistema com o valor de r_0, a_0 e a_1:

$$\begin{cases} \alpha_1 = & a_0 \\ \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0 = & a_1 \end{cases}$$

Como $a_0 = 1$, $a_1 = 6$ e $r_0 = 3$, temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 = & 1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = & 6 \end{cases}$$

Relações de Recorrência Lineares Homogêneas de Grau 2 com Coeficientes Constantes

$$\begin{cases} \alpha_1 = & 1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = & 6 \end{cases}$$

Então $\alpha_2 = \frac{6-3\alpha_1}{3}$.

Substituindo α_1 na equação: $\alpha_2 = 1$.

Então, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$.

A solução da relação de recorrência é $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$

$a_n = 3^n + n3^n = (n+1)3^n$.

Exercício: O que é o Teorema Mestre?