Indução Matemática

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

GERSTING, Judith L.,*Mathematical Structures For Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics, 6th ed., 2007.*

MAMBER, Udi, Introduction to Algorithms: a Creative Approach, 1st ed., 1989.

ROSEN, Kenneth H., *Discrete Mathematics and its applications, 6th ed., 2007.*

Fundamentos da Indução Matemática

Se desejamos provar que uma propriedade $P(n)$ é verdade para qualquer número inteiro n, onde $n \geq 1$, podemos executar os seguintes passos:

1. Provar $P(1)$, ou seja, que a propriedade vale quando $n = 1$.
2. Mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$, para algum inteiro k.

   Ou seja, provar que se a propriedade vale para k, então também vale para o número $k+1$.

1. Provar $P(1)$.
2. Mostrar que $P(k) \to P(k+1)$, para algum inteiro k.

Dessa forma, pelo item (1), a afirmação $P(n)$ é verdade para $n = 1$.

Fundamentos da Indução Matemática

1. Provar $P(1)$.
2. Mostrar que $P(k) \to P(k+1)$, para algum inteiro k.

Dessa forma, pelo item (1), a afirmação $P(n)$ é verdade para $n = 1$.

Pelo item (2), se $P(1)$ é verdade, então $P(2)$ é verdade.

Fundamentos da Indução Matemática

1. Provar $P(1)$.
2. Mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$, para algum inteiro k.

Dessa forma, pelo item (1), a afirmação $P(n)$ é verdade para $n = 1$.

Pelo item (2), se $P(1)$ é verdade, então $P(2)$ é verdade.

Pelo item (2), já que $P(2)$ é verdade, então $P(3)$ é verdade.

1. Provar $P(1)$.
2. Mostrar que $P(k) \to P(k+1)$, para algum inteiro k.

Dessa forma, pelo item (1), a afirmação $P(n)$ é verdade para $n = 1$.

Pelo item (2), se $P(1)$ é verdade, então $P(2)$ é verdade.

Pelo item (2), já que $P(2)$ é verdade, então $P(3)$ é verdade.

E assim sucessivamente!

Consequentemente, pelas provas (1) e (2), $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n \geq 1$.

Etapas da Indução

Passos para uma prova por indução matemática:

1. **Base:** provar que vale para o menor inteiro considerado no enunciado.
2. **Hipótese de indução:** considerar que o enunciado é verdadeiro para algum inteiro k.
3. **Passo da indução:** provar que quando o enunciado é verdade para k, ele também é verdade para $k + 1$.

O passo da indução é a prova da implicação $P(k) \rightarrow P(k + 1)$. Observe que já assumimos a hipótese $P(k)$ para uma prova direta.

Exemplos

Exemplo 1

Conjectura: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Base: O primeiro número na sequência a ser somado é o número 1.

Então, devemos provar que a fórmula é verdade para $n = 1$, ou seja, que 1 $= \frac{n(n+1)}{2}$, quando $n = 1$.

Pela fórmula proposta, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Então, para $n = 1$, a fórmula apresenta o resultado esperado.

Exemplo 1

Conjectura: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Hipótese de indução: Suponha que

$$1 + 2 + 3 \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para algum inteiro } k.$$

Com essa suposição, vamos tentar provar o passo, ou seja, que a fórmula também vai responder corretamente se somarmos

$1 + 2 + 3 + \ldots k + (k+1)$.

Exemplo 1

Conjectura: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passo: Queremos saber quanto vale $1 + 2 + 3 \ldots k + (k + 1)$.

Vamos manipular o somatório

$$1 + 2 + 3 \ldots k + (k + 1)$$

para tentar chegar à mesma fórmula que nos foi dada no enunciado, quando $n = k + 1$:

$$\frac{n(n + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Exemplo 1

Conjectura: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Hipótese de indução: $1 + 2 + 3 \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, para algum inteiro k.

Passo:

Assumindo que a hipótese de indução é verdade, então:

$$1 + 2 + 3 \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Então a fórmula está correta para o caso $n = k + 1$. $\square$

Exemplos

Exemplo 2

Encontre uma fórmula para a soma dos n primeiros números ímpares.

$n = 1$ $\quad 1 = 1.$

$n = 2$ $\quad 1 + 3 = 4$

$n = 3$ $\quad 1 + 3 + 5 = 9$

$n = 4$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula para a soma dos n primeiros números ímpares.

$n = 1$ $\qquad 1 = 1.$

$n = 2$ $\qquad 1 + 3 = 4$

$n = 3$ $\qquad 1 + 3 + 5 = 9$

$n = 4$ $\qquad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Observando o padrão, é possível criar a seguinte conjectura:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2.$$

Exemplos

Exemplo 2

Conjectura: $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

Base: Já mostramos que a fórmula funciona para os casos $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ (slide anterior).

Hipótese de indução: Suponha que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 = k^2,$$

para um inteiro k.

Exemplo 2

Conjectura: $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

Passo: Vamos provar que se a hipótese é verdadeira, então o resultado do somatório quando $n = k + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2(k + 1) - 1$$

também é igual ao da fórmula quando $n = k + 1$: $n^2 = (k + 1)^2$.

Passo: $1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 + 2(k + 1) - 1$

pela hipótese de indução, é igual a:

$k^2 + 2(k + 1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Exemplos

Note que o resultado da soma dos n primeiros números ímpares é o mesmo que obtemos quando substituímos n por $k+1$ na fórmula do enunciado:

$$1+3+\ldots+2(k+1)-1=(k+1)^2.$$

Então a fórmula está correta para o caso $n=k+1$.

Como mostramos que a fórmula vale para $n=1$ e, se for verdade para um inteiro $n=k$, então é verdade para $n=k+1$, a prova está completa. $\square$

Exemplo 3

Conjectura: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Base: Observe que a sequência é a soma das potências 2^i para i variando de 0 até n.

Quando a soma contém apenas 1 número, trata-se da potência 2^0, então o primeiro caso a se testar na base é $n = 0$.

$2^0 = 1$.

Usando a fórmula da conjectura para $n = 0$, temos:
$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.

A soma da sequência e o valor dado pela fórmula são iguais. Então, a fórmula está correta quando $n = 0$.

Exemplo 3

Conjectura: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

Hipótese de indução: Suponha que é verdade que

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1, \text{ para algum inteiro } k.$$

Passo: Vamos manipular a soma

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{(k+1)}$$

para tentar chegar à mesma fórmula dada no enunciado, quando $n = k + 1$:

$$2^{n+1} - 1 = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

Exemplos

Passo: Assumindo que a hipótese de indução é verdade, então:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2(2^{k+1}) - 1 = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Como a fórmula dada no enunciado é igual à que encontramos para o caso $n = k + 1$, ela está correta. $\square$

Exemplos

Exemplo 4

Conjectura: $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo número inteiro positivo n.

Base: Considerando $n = 0$, temos:

$0^3 - 0 = 0$

Como 0 é divisível por 3 então, a fórmula está correta para o caso base com $n = 0$.

Hipótese de indução: Suponha que

$$k^3 - k \text{ é divisível por } 3, \text{ para algum inteiro } k \geq 0.$$

Exemplo 4

Conjectura: $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo número inteiro positivo n.

Passo: Agora, devemos mostrar que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3.

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1)\\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1\end{aligned}$$

Pela hipótese, $k^3 - k$ é divisível por 3. Então $k^3 - k = 3x$, $x \in \mathbb{Z}$.

$$k^3 + 3k^2 + 3k + \cancel{1} - k - \cancel{1} = 3x + 3k^2 + 3k = 3(x + k^2 + k)$$

Como $k, x \in \mathbb{Z}$, concluí-se que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3. $\square$

Exemplo 5

Conjectura: Para qualquer par de números naturais, x e n, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$

A indução é em n.

Base: $n = 1$

Quando $n = 1$, tem-se $x^n - 1 = x^1 - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$.

Portanto, o Teorema vale quando $n = 1$.

Exemplo 5

Conjectura: Para qualquer par de números naturais, x e n, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$

Hipótese de indução: Suponha que é verdade que $x^k - 1$ é divisível por $x - 1$, para qualquer k natural.

Então, $x^k - 1 = a(x - 1)$, para algum valor a inteiro.

Exemplo 5

Conjectura: Para qualquer par de números naturais, x e n, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$

Passo: Vamos provar que, se a hipótese é verdadeira, então $x^{(k+1)} - 1$ é divisível por $x - 1$.

$$x^{(k+1)} - 1 = x(x^k) - 1 = x(x^k) - x + x - 1 = x(x^k - 1) + x - 1 =$$

Pela hipótese de indução:

$$x(x^k - 1) + x - 1 = x[a(x - 1)] + x - 1 = ax(x - 1) + (x - 1) = (ax + 1)(x - 1)$$

Portanto, $x^{(k+1)} - 1 = (ax + 1)(x - 1)$ é divisível por $(x - 1)$.

Exemplo 6

Conjectura: $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$.

Observe que trata-se da soma dos termos de uma Progressão Geométrica na qual:

- o primeiro termo é a;
- a razão é r;
- a quantidade de termos que serão somados é n.

O enunciado apresenta uma fórmula para calcular o valor da soma dos termos ar^j, com j variando de 0 a n.

Exemplo 6

Conjectura: $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$.

Base: Vamos verificar se a fórmula está correta quando $n = 0$:

Como $n = 0$, a sequência tem apenas o elemento $ar^0 = a$. Então a soma é a.

A fórmula diz que o resultado dessa soma é $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$, substituindo n por zero:

$$\frac{ar^{0+1} - a}{r - 1} = \frac{ar - a}{r - 1} = \frac{a(r - 1)}{r - 1} = \frac{a\cancel{(r - 1)}}{\cancel{r - 1}} = a$$

Então a fórmula está correta para o caso $n = 0$.

Exemplo 6

Conjectura: $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$.

Hipótese de indução: Suponha que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}, \text{ para algum inteiro } k \geq 0.$$

Exemplo 6

Conjectura: $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$.

Passo: Vamos verificar se o valor da soma $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + ar^{k+1}$ é como descrito pela fórmula do enunciado, quando $n = k + 1$.

Pela hipótese de indução:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1}$$

$$\frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a + (r-1)ar^{k+1}}{r - 1} =$$

Exemplos

$$= \frac{ar^{k+1} - a + (r-1)ar^{k+1}}{r-1} = \frac{r(ar^{k+1}) - a}{r-1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}.$$

Note que se substituirmos o valor de n pelo valor de $k+1$ na fórmula $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$, obtemos o mesmo resultado:

$$\frac{ar^{(k+1)+1} - a}{r-1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}$$

.

Portanto, a fórmula está correta. $\square$

Exemplo 7

Conjectura: Se n é um número natural e $1 + x > 0$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

A prova é por indução em n.

Base: $n = 1$: $(1 + x)^1 \geq 1 + 1x$

$$1 + x \geq 1 + x$$

Hipótese de indução: Considere $n = k$, um número natural. Suponha que

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

Exemplo 7

Conjectura: Se n é um número natural e $1 + x > 0$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Passo: Vamos verificar se $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$.

$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k$, por propriedades da exponenciação.

Pela hipótese de indução:

$$(1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1 + kx + x + kx^2 = (k+1)x + 1 + kx^2$$

Como k é natural e $x^2 \geq 0$, sabemos que $kx^2 \geq 0$. Então,

$$(k+1)x + 1 + kx^2 \geq (k+1)x + 1. \quad \square$$

Exemplo 8

Conjectura: Se n é inteiro e $n \geq 0$, então $n < 2^n$.

Base: Vamos provar que o enunciado vale quando $n = 0$.

$$0 < 2^0$$

$$0 < 1$$

Portanto, é verdade neste caso.

Hipótese de indução: Suponha que $k < 2^k$, para algum valor inteiro k, tal que $k \geq 0$.

Exemplo 8

Conjectura: Se n é inteiro e $n \geq 0$, então $n < 2^n$.

Passo: Pela hipótese de indução, $k < 2^k$.

Somando 1 em ambos os lados, a desigualdade permanece:

$$k + 1 < 2^k + 1.$$

Como $k \geq 0$, $1 \leq 2^k$.

Então, $2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$.

Portanto, $k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^{k+1}$, ou seja $k + 1 < 2^{k+1}$. $\square$

Exemplo 9

Conjectura: Se n é inteiro e $n \geq 4$, então $2^n < n!$.

Base: Como $n \geq 4$, devemos verificar se a fórmula está correta para $n = 4$.

$2^n = 2^4 = 16$

Pela fórmula: $n! = 4! = 4.3.2.1 = 24$

$16 < 24$, é verdade!

Então, a fórmula está correta para o caso em que $n = 4$.

Exemplo 9

Conjectura: Se n é inteiro e $n \geq 4$, então $2^n < n!$.

Hipótese de indução: Suponha que

$$2^k < k!$$

para algum inteiro $k \geq 4$.

Exemplo 9

Conjectura: Se n é inteiro e $n \geq 4$, então $2^n < n!$.

Passo: Agora, devemos mostrar que $2^{(k+1)} < (k+1)!$

Note que $2^{k+1} = 2.2^k$, e pela hipótese indutiva $2^k < k!$, então:

$2^{k+1} = 2.2^k < 2.k!$.

Como $k \geq 4$ sabemos que $2 < k+1$ e substituímos:

$2^{k+1} < 2.k! < (k+1).k! = (k+1).(k).(k-1).(k-2)\ldots 3.2.1 = (k+1)!$

Logo, $2^{k+1} < (k+1)!$ $\square$

Exemplo 10

Conjectura: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1$.

Base: Quando $n = 1$, tem-se: $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} < 1$ e a conjetura é verdadeira.

Hipótese de indução: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k} < 1$, para algum inteiro k.

Passo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} =$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)$$

Pela hipótese de indução,
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) = 1$. $\square$