

Somatórios

Profa. Sheila Moraes de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

Anamaria GOMIDE e Jorge STOLFI. **Elementos da Matemática Discreta para Computação**. disponível em [Elementos da Matemática Discreta para Computação](#).

U. MAMBER, **Introduction to Algorithms: a Creative Approach**, Addison Wesley, 1st ed., 1989.

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).

Thomas H. CORMEN, Charles E. LEISERSON, Ronald L. RIVEST, Clifford STEIN. *Introduction to Algorithms*, 2 ed., 2001.

Definição

Somatório (ou Somatória) é uma forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de parcelas que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente.

Exemplo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k$$

É a soma de parcelas que são todas potências de 2 consecutivas, a partir de 2^0 .

Definição

Somatório (ou Somatória) é uma forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de parcelas que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente.

Outro exemplo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n + 1$$

É a soma de parcelas que são números ímpares consecutivos, a partir do número 1.

Somatórios - Notação Sigma

O Somatório é também chamado de **Notação Sigma** e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{k=m}^n f(k)$$

ou

$$\sum_{k=m}^n f(k)$$

Deve-se incluir na soma todos os valores de $f(k)$, desde que $k \geq m$ e $k \leq n$.

Quando $m > n$, $\sum_{k=m}^n f(k) = 0$.

Exemplo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{100} = \sum_{k=0}^{100} 2^k$$

Outro exemplo:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^n 2i + 1$$

A variável k do primeiro exemplo e a variável i do segundo exemplo são chamadas de **variáveis indexadoras**.

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 7, 8\}$

$$\sum_{k \in A} k(9 - k) = 1 \times 8 + 2 \times 7 + 7 \times 2 + 8 \times 1 = 44$$

Podemos provar que:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Também podemos deduzir:

$$\sum_{k=1}^n 1 = 1 + 1 + 1 \dots + 1 = n \times 1 = n$$

Manipulação de Somatórios

Podemos substituir o intervalo definido para a variável indexadora, desde que façamos ajustes no somatório:

Substituindo k por $i = k + 1$:

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1}$$

Manipulação de Somatórios

Pode-se colocar constantes em evidência:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n c(k+5) &= c(1+5) + c(2+5) + c(3+5) + \dots + c(n+5) = \\ &= c[(1+5) + (2+5) + (3+5) + \dots + (n+5)] = c \sum_{k=1}^n (k+5)\end{aligned}$$

De forma geral,

$$\sum_{k=m}^n cf(k) = c \sum_{k=m}^n f(k)$$

Manipulação de Somatórios

Um somatório de somas pode ser substituído por uma soma de somatórios:

$$\sum_{k=1}^n f(k) + g(k) = f(1) + g(1) + f(2) + g(2) + \dots + f(n) + g(n) =$$

$$= f(1) + f(2) + \dots + f(n) + g(1) + g(2) + \dots + g(n) = \sum_{k=1}^n f(k) + \sum_{k=1}^n g(k)$$

De forma geral,

$$\sum_{i=m}^n f(i) + g(i) = \sum_{i=m}^n f(i) + \sum_{i=m}^n g(i)$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) &= \sum_{k=1}^n x_{k+1} - \sum_{k=1}^n x_k \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{k=1}^n x_k \\ &= \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} - x_1 - \sum_{k=1}^n x_k \\ &= \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} - x_1 \\ &= x_{n+1} - x_1\end{aligned}$$

Definição

Um **somatório telescópico** é um somatório em que o segundo termo de uma parcela cancela o primeiro termo da próxima (ou vice-versa).

Um exemplo é o somatório visto no último exemplo.

Vamos usar a propriedade dos somatórios telescópicos para calcular $\sum_{k=1}^n k^2$.

Observe que $(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

Então, $(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

$$\sum_{k=1}^n ((k + 1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

Manipulação de Somatórios

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

Observe que o lado esquerdo é um somatório telescópico:

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \dots + n^3 - (n-1)^3 + (n+1)^3 - n^3 \\ = -1^3 + (n+1)^3 \\ = (n+1)^3 - 1 \end{aligned}$$

Manipulação de Somatórios

Então,

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

pode ser reescrito:

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^n k^2 &= (n+1)^3 - 1 - 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= (n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \end{aligned}$$

Manipulação de Somatórios

$$\begin{aligned}3 \sum_{k=1}^n k^2 &= (n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \\&= (n+1)(n^2 + 2n + 1) - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \\&= \frac{2(n^2 + 2n + 1)(n+1)}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{2n}{2} \\&= \frac{(2n^2 + 4n + 2 - 3n)(n+1)}{2} - \frac{2(n+1)}{2} \\&= \frac{(2n^2 + n + 2 - 2)(n+1)}{2} = \frac{(2n^2 + n)(n+1)}{2} \\&= \frac{n(2n+1)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{2}$$

Então,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Somatórios Múltiplos

Os termos de um somatório podem estar em função de mais de uma variável indexadora:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i, j)$$
$$= f(1, 5) + f(1, 6) + f(1, 7) + f(1, 8)$$
$$+ f(2, 5) + f(2, 6) + f(2, 7) + f(2, 8)$$
$$+ f(3, 5) + f(3, 6) + f(3, 7) + f(3, 8)$$

Pode-se escrever:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i, j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=5}^8 f(i, j)$$

Somatórios Múltiplos

Observe:

$$= f(1, 5) + f(1, 6) + f(1, 7) + f(1, 8)$$

$$+ f(2, 5) + f(2, 6) + f(2, 7) + f(2, 8)$$

$$+ f(3, 5) + f(3, 6) + f(3, 7) + f(3, 8)$$

$$= f(1, 5) + f(2, 5) + f(3, 5) + f(1, 6) + f(2, 6) + f(3, 6)$$

$$+ f(1, 7) + f(2, 7) + f(3, 7) + f(1, 8) + f(2, 8) + f(3, 8)$$

Portanto,

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i, j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=5}^8 f(i, j) = \sum_{j=5}^8 \sum_{i=1}^3 f(i, j)$$

Mudança de Ordem dos Somatórios

Há casos em que uma das variáveis indexadoras depende da outra:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} \\ &= a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + \dots + a_{1,n} \\ &\quad + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + \dots + a_{2,n} \\ &\quad + a_{3,3} + a_{3,4} + \dots + a_{3,n} + \dots \\ &\quad + a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n} \\ &\quad + a_{n,n} \end{aligned}$$

Mudança de Ordem dos Somatórios

Nesses casos, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} \\ &= a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + \dots + a_{1,n} \\ &\quad + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + \dots + a_{2,n} \\ &\quad + a_{3,3} + a_{3,4} + \dots + a_{3,n} + \dots \\ &\quad + a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n} \\ &\quad + a_{n,n}\end{aligned}$$

Distributividade dos Somatórios

$$\left(\sum_{i=1}^n f(i) \right) \left(\sum_{j=1}^m g(j) \right)$$

$$= (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)) [g(1) + g(2) + \dots + g(m)]$$

$$= f(1)g(1) + f(1)g(2) + \dots + f(1)g(m)$$

$$+ f(2)g(1) + f(2)g(2) + \dots + f(2)g(m)$$

$$+ f(3)g(1) + f(3)g(2) + \dots + f(3)g(m) + \dots$$

$$+ f(n)g(1) + f(n)g(2) + \dots + f(n)g(m)$$

Distributividade dos Somatórios

Observe que

$$\begin{aligned} & f(1)g(1) + f(1)g(2) + \dots + f(1)g(m) \\ & + f(2)g(1) + f(2)g(2) + \dots + f(2)g(m) \\ & + f(3)g(1) + f(3)g(2) + \dots + f(3)g(m) + \dots \\ & + f(n)g(1) + f(n)g(2) + \dots + f(n)g(m) \\ & = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} f(i)g(j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(i)g(j) \end{aligned}$$

Somas de Séries Geométricas

Por que $\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$?

Quando temos um número binário $a_k a_{k-1} a_{k-2} a_{k-3} \dots a_0$ e queremos convertê-lo para a base decimal, fazemos:

$$a_k(2^k) + a_{k-1}(2^{k-1}) + a_{k-2}(2^{k-2}) + a_{k-3}(2^{k-3}) + \dots + a_0(2^0)$$

Quando $a_i = 1$, para todo $i \in [0, k]$, temos:

$$2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2^0$$

Somas de Séries Geométricas

Parece difícil calcular $2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2^0$.

E quando somamos mais 1 na base binária?

$$11111111 \dots 1 + 1 = 100000000 \dots 0$$

primeiro termo da soma: $k + 1$ dígitos

resultado da soma: $k + 2$ dígitos.

Na conversão para a base decimal:

$$100000000 \dots 0 = 2^{k+1}.$$

$$\text{Então, } (\sum_{i=0}^k 2^i) + 1 = 2^{k+1}.$$

$$\text{Então, } \sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1.$$

Somas de Séries Geométricas

Usando esta idéia, você consegue mostrar que $\sum_{i=0}^k x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$?

Somas de Série Harmônica

$$\sum_{i=0}^k \frac{1}{i} = \ln k + c, \text{ onde } c \text{ é uma constante.}$$

Leia a Seção A.2 (Apêndice A) do livro de Thomas H. CORMEN et al. *Introduction to Algorithms*, 2 ed., 2001.