Notação Assintótica

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

junho - 2018

Este material é preparado usando como referências os textos dos seguintes livros.

Thomas H. CORMEN, Charles E. LEISERSON, Ronald L. RIVEST, Clifford STEIN. *Introduction to Algorithms*, 2nd ed., 2001.

Alfred AHO, Jeffrey HOPCROFT, John ULLMAN. *The design and analysis of computer algorithms*, 1st ed., 1974.

Udi Manber. *Introduction to Algorithms: a creative approach.*, 1st ed., 1989.

- Estamos interessados em avaliar a **eficiência** de um algoritmo.
- A eficiência do algoritmo é medida em termos da quantidade de recursos que o mesmo utiliza quando é executado.
- No momento, estamos interessados no tempo de execução.
- O tempo é medido em número de instruções que o algoritmo executa.

Análise Assintótica

Ao realizar a análise do algoritmo para uma determinada instância de tamanho n, encontramos uma função $T(n)$.

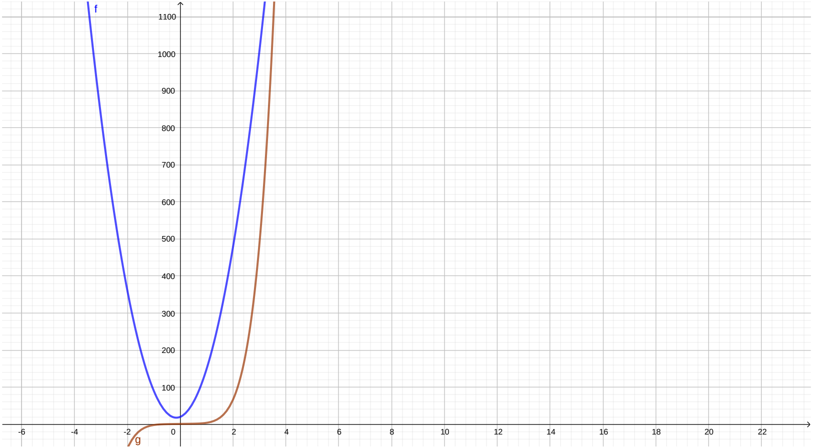
$T(n)$ é o número de instruções que são executadas pelo algoritmo.

É interessante saber:

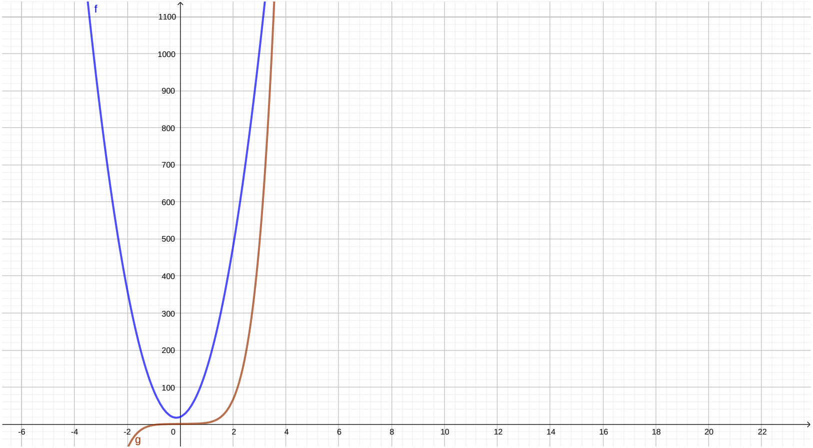
- $T(n)$ é um tempo de execução razoável? É viável utilizar esse algoritmo?
- É possível resolver o mesmo problema com algum algoritmo que execute menos que $T(n)$ instruções;
- Se existem dois (ou mais) algoritmos que resolvem o mesmo problema, com tempos de execução dados pelas funções $T_1(n)$ e $T_2(n)$, qual dos dois é mais eficiente (responde mais rápido)?

Análise Assintótica

$f(n) = 100n^2 + 30n + 2000$ $\qquad$ $g(n) = 2n^5 + n + 1.$



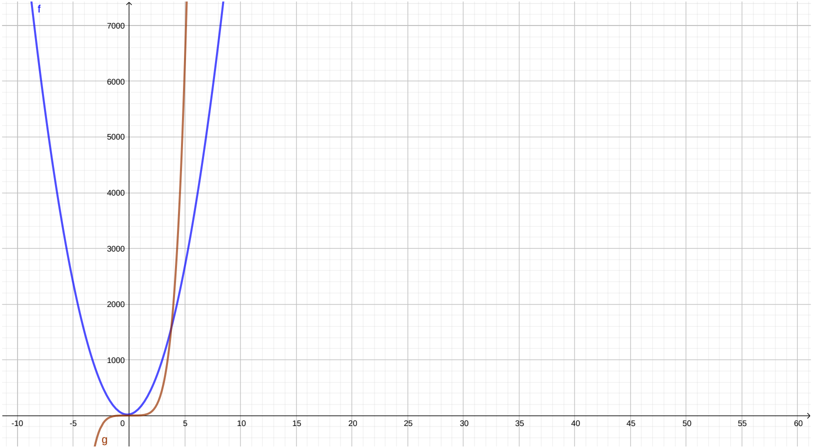
$f(n) = 100n^2 + 30n + 2000$ $\qquad$ $g(n) = 2n^5 + n + 1.$



Estamos interessados em comparar essas funções quando o tamanho da entrada for muito grande.

Análise Assintótica

$f(n) = 100n^2 + 30n + 2000$ $\qquad$ $g(n) = 2n^5 + n + 1.$



Estamos interessados em comparar essas funções quando o tamanho da entrada for muito grande.

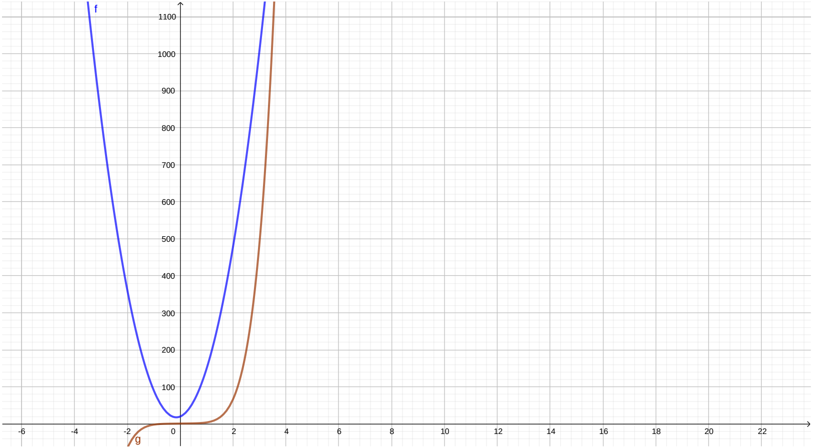
É comum que a função que descreve o tempo de execução tenha constantes sendo somadas ou multiplicadas pelos seus termos.

Exemplos:

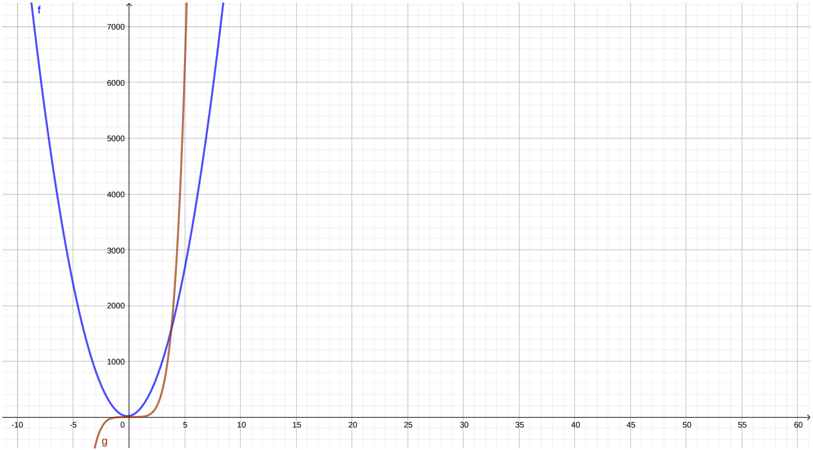
- $f(n) = 100n^2 + 30n^2 + 2000$.
- $g(n) = 2n^5 + n + 1$.

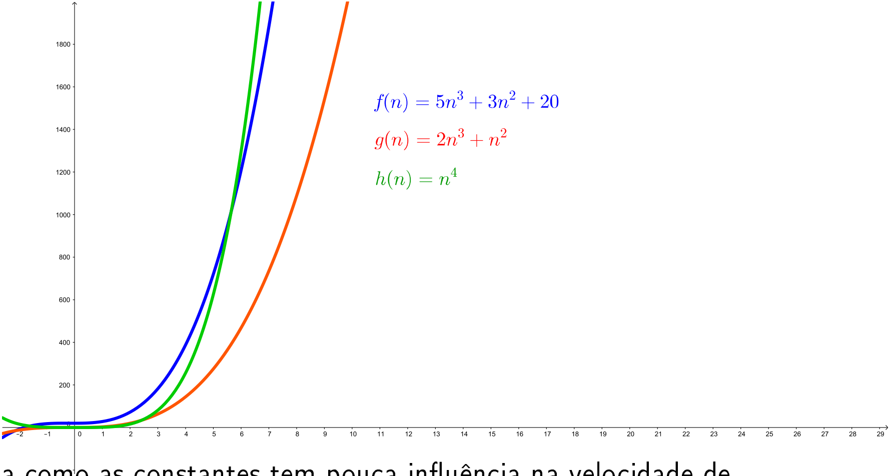
Análise Assintótica

Mas, no exemplo, as constantes menores em $g(n)$ não garantem que o tempo de execução do algoritmo representado por essa função é menor.



Mas, no exemplo, as constantes menores em $g(n)$ não garantem que o tempo de execução do algoritmo representado por essa função é menor.





Veja como as constantes tem pouca influência na velocidade de crescimento das funções.

Notação Assintótica

É uma notação matemática usada para melhor analisarmos o comportamento das funções para grandes valores de n, podendo ignorar constantes.

O comportamento da velocidade com que as funções crescem, independente das constantes que multiplicam seus termos, é chamado de **comportamento assintótico**.

Algoritmos descritos por funções que são assintoticamente menores, ou seja, que crescem mais devagar, são melhores opções para tratar entradas grandes.

Por que se preocupar mais com as entradas grandes?

Análise Assintótica

Algoritmos descritos por funções que são assintoticamente menores, ou seja, que crescem mais devagar, são melhores opções para tratar entradas grandes.

Por que se preocupar mais com as entradas grandes?

Essas entradas potencialmente necessitam de maior número de instruções computacionais para se obter a resposta.

Para essas entradas, o uso de algoritmo mais eficiente (ou menos eficiente) tem maior impacto no tempo de execução.

Notação O

Definição

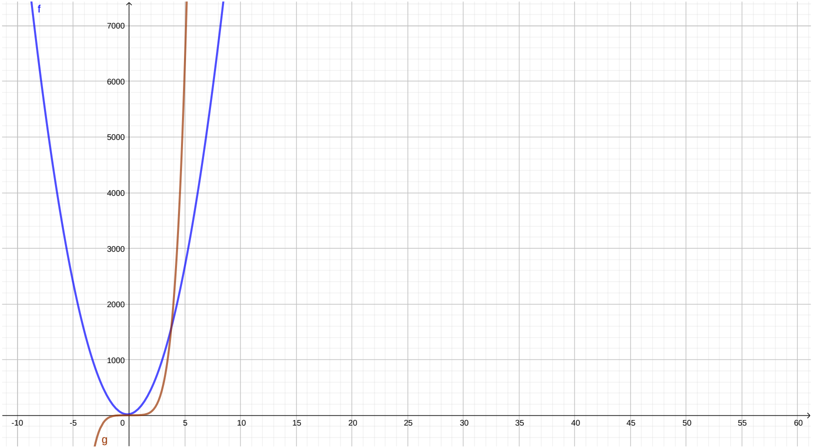
Uma função $f(n)$ pertence a $O(g(n))$, se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que

$$f(n) \leq c.g(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Denota-se $f(n) \in O(g(n))$.

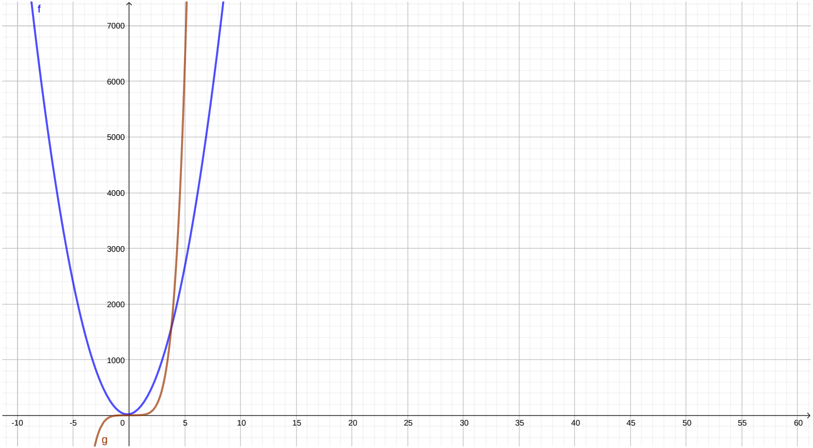
Um abuso de notação (comum): $f(n) = O(g(n))$,

$f(n) = 100n^2 + 30n + 2000$ $\qquad$ $g(n) = 2n^5 + n + 1.$



$$100n^2 + 30n + 2000 \leq 50(2n^5 + n + 1), \forall n \geq 100$$

$f(n) = 100n^2 + 30n + 2000$ $\qquad$ $g(n) = 2n^5 + n + 1.$



$$f(n) \leq 50g(n), \forall n \geq 100, \text{ então } f(n) \in O(g(n))$$

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $O(g(n))$, se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que

$$f(n) \leq c.g(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Denota-se $f(n) \in O(g(n))$.

Pela definição, $O(g(n))$ é um conjunto em que cada função é limitada superiormente por $cg(n)$ para algum $c > 0$ e para valores de n a partir de algum ponto da reta real.

Exemplo: $O(n^2) = \{3, 5n, 8n, 100n, n^2, 10n^2, 50n^2 \ldots\}$

Teorema 1 (U. Mamber)

Para todas as constantes $c > 0$ e $a > 1$, e para todas as funções $f(n)$ monótonas crescentes, $(f(n))^c \in O(a^{f(n)})$.

Ou seja, funções exponenciais crescem mais rápido que funções polinomiais.

Notação O

Será que $n^2 \in O(2^n)$?

Exemplo 1

Provar que $n^2 \in O(2^n)$.

prova: Suponha $n \geq 4$.

Se $n = 4$, então $4^2 = 16 \leq 2^4$

Hipótese de indução: Seja k um inteiro tal que $k \geq 4$. Suponha que $k^2 \leq 2^k$.

passo: $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \leq 2^k + 2k + 1$, pela hipótese de indução.

$(k+1)^2 \leq 2^k + 2k + 1 \leq 2^k + k^2$, pois $k \geq 4$.

Então $(k+1)^2 \leq 2^k + k^2 \leq 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$. $\square$

Notação O

Teorema 2 (U. Mamber)

Para todas as constantes $c > 0$ e $a > 1$, e para todas as funções $f(n)$ monótonas crescentes, $(f(n))^c \in O(a^{f(n)})$.

Aplicando o Teorema 2 em $f(n) = n$: $n^c \in O(a^n)$.

Aplicando o Teorema 2 em $f(n) = \log_a n$: $(\log_a n)^c \in O(a^{\log_a n}) = O(n)$.

Lema 3 (U. Mamber)

Se $f(n) \in O(p(n))$ e $g(n) \in O(q(n))$, então

$$f(n) + g(n) \in O(p(n) + q(n))$$

e

$$f(n) \cdot g(n) = O(p(n) \cdot q(n)).$$

Notação O

prova: Por definição da notação O, existem constantes c_1, n_1, c_2 e n_2, tais que $f(n) \leq c_1 p(n)$, para todo $n \leq n_1$ e $g(n) \leq c_2 q(n)$, para todo $n \geq n_2$.

Então, $f(n) + g(n) \leq c_1 p(n) + c_2 q(n)$.

Seja $c = \max c_1, c_2$. Então,
$f(n) + g(n) \leq c_1 p(n) + c_2 q(n) \leq cp(n) + cq(n) = c(p_n) + q(n))$.

Portanto, $f(n) + g(n) \leq c(p(n) + q(n))$ e, por definição,
$f(n) + g(n) \in O(p(n) + q(n))$.

Notação O

Além disso, $f(n) \cdot g(n) \leq c_1 p(n) \cdot c_2 q(n) = c_1 \cdot c_2 \cdot p(n) \cdot q(n)$.

Considere a constante $c = c_1 \cdot c_2$. Então,
$f(n) \cdot g(n) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot p(n) \cdot q(n) = c \cdot p(n) \cdot q(n)$.

Então, $f(n) \cdot g(n) \leq c \cdot p(n) \cdot q(n)$ e, por definição,
$f(n) \cdot g(n) \in O(p(n) \cdot q(n))$. $\square$

Notação Ω

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Omega(g(n))$, se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \geq c.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

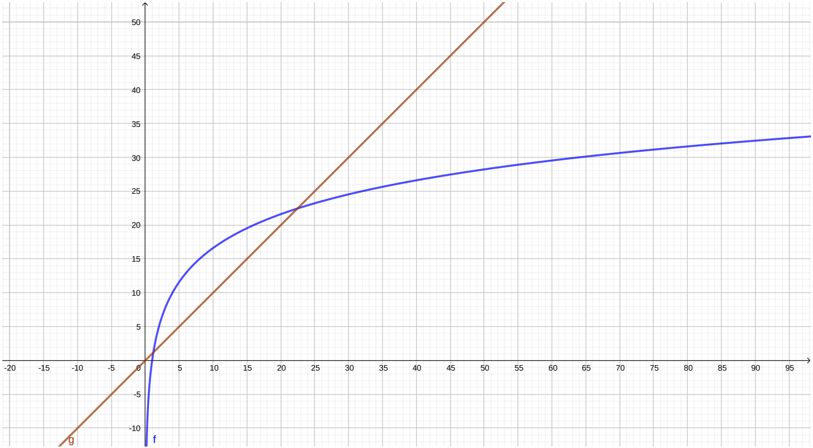
Denota-se $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Um abuso de notação (comum): $f(n) = \Omega(g(n))$,

Notação Ω

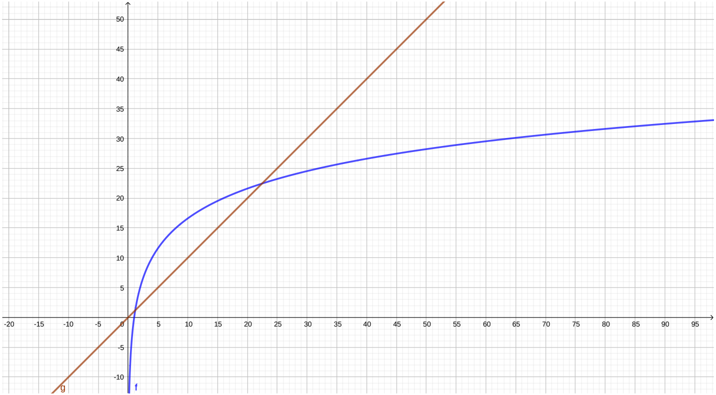
Uma função $f(n)$ pertence a $\Omega(g(n))$, se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \geq c.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

$f(n) = n$ $\qquad$ $g(n) = 5 \log_2 n$.



Uma função $f(n)$ pertence a $\Omega(g(n))$, se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \geq c.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

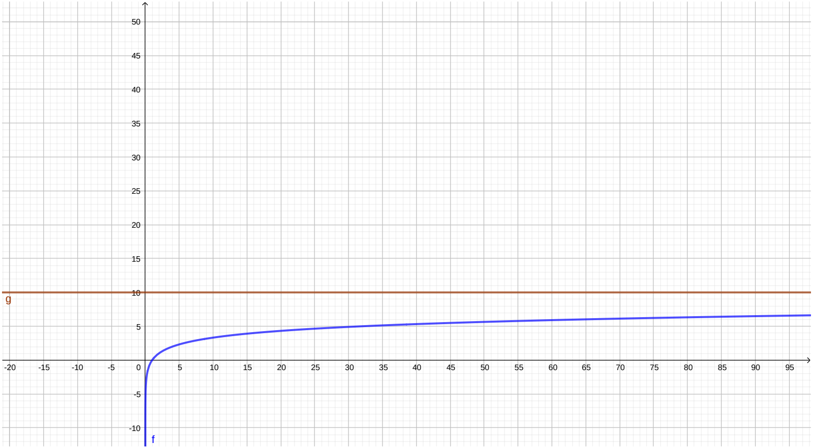
$f(n) = n$ $g(n) = 5\log_2 n$.



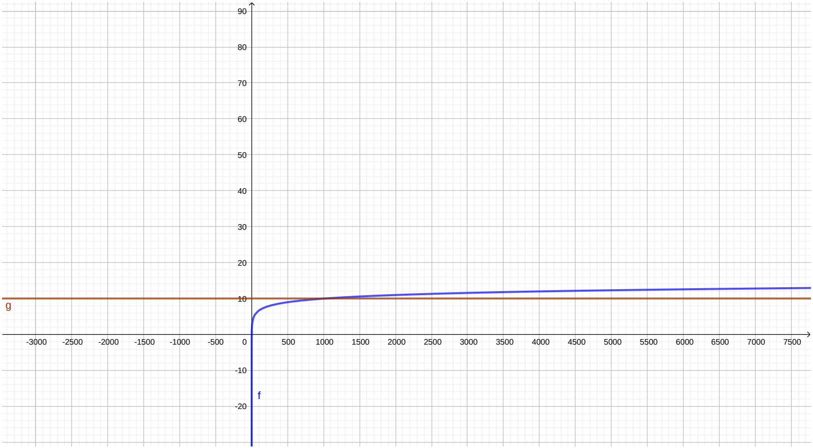
$f(n) = n \geq 5\log_2 n = g(n), \forall n \geq 25$. Então, $n \in \Omega(5\log_2 n)$

Notação Ω

$f(n) = \log_2 n$ $\qquad$ $g(n) = 10.$



$f(n) = \log_2 n \qquad g(n) = 10.$



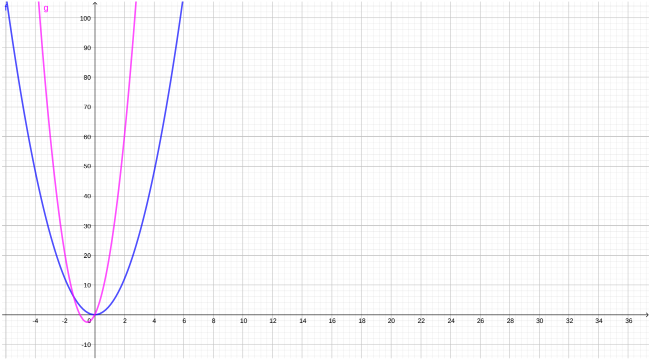
$\log_2 n \geq 10, \forall n \geq 1024$. Então $\log_2 n \in \Omega(1)$

Notação Θ

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Theta(g(n))$, se existem **três** constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 10n^2 + 10n$.



Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Theta(g(n))$, se existem **três** constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 10n^2 + 10n$.

$$3n^2 \leq 10n^2 + 10n, \forall n \geq 0$$

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Theta(g(n))$, se existem **três** constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = \frac{1}{5}(10n^2 + 10n)$.

$$3n^2 \geq \frac{1}{5}(10n^2 + 10n), \forall n \geq 4$$

Notação Θ

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Theta(g(n))$, se existem **três** constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

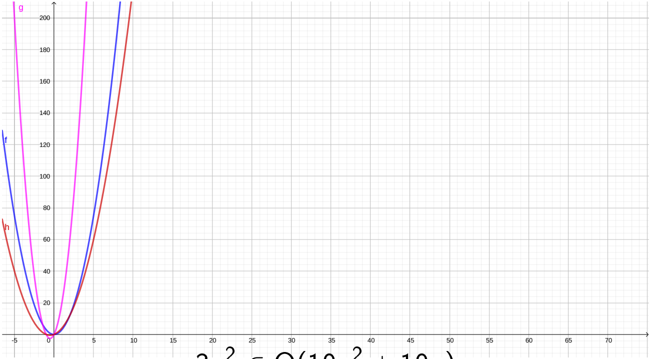
$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 10n^2 + 10n$. $g(n) = \frac{1}{5}(10n^2 + 10n)$.

$$\frac{1}{5}(10n^2 + 10n) \leq 3n^2 \leq 1(10n^2 + 10n), \forall n \geq 4$$

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Theta(g(n))$, se existem **três** constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 10n^2 + 10n$. $g(n) = \frac{1}{5}(10n^2 + 10n)$.



$3n^2 \in \Theta(10n^2 + 10n)$

Notação Θ

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Theta(g(n))$, se existem **três** constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

$$2(n^2 + n) \leq 3n^2 \leq 10(n^2 + n), \forall n \geq 4$$

$$3n^2 \in \Theta(n^2 + n)$$

Notação Θ

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Theta(g(n))$, se existem **três** constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

$$2n^2 \leq 2(n^2 + n) \leq 3n^2 \leq 10(n^2 + n) \leq 11n^2, \forall n \geq 10$$

$$3n^2 \in \Theta(n^2)$$

Notação o

Reveja a definição da notação O:

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $O(g(n))$, se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \leq c.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

Observe que, é permitido $f(n) = c.g(n)$. Veja exemplos:

$$n^2 \in O(n^2)$$

$$10n \in O(n)$$

Notação o

Reveja a definição da notação O:

Definição

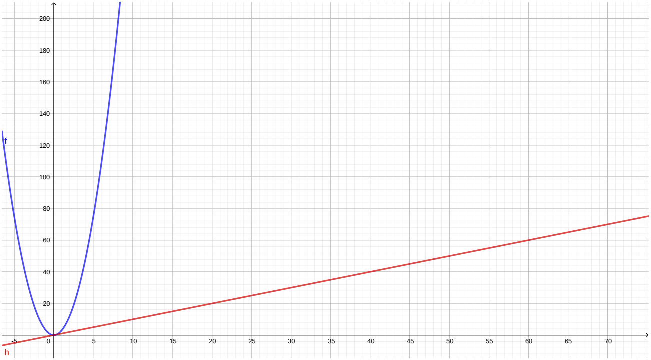
Uma função $f(n)$ pertence a $o(g(n))$ se, para toda constante positiva c, existe um inteiro n_0 tal que $f(n) < c.g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

Na classe o, a igualdade não ocorre a partir de algum valor n_0.

Notação o

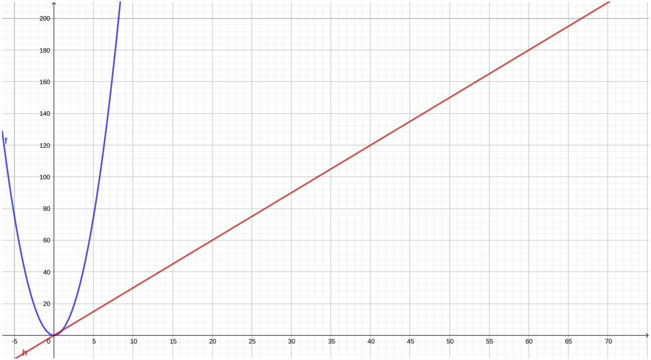
Na classe o, a igualdade não ocorre a partir de algum valor n_0:

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = n$.



Na classe o, a igualdade não ocorre a partir de algum valor n_0:

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 3n$.



Notação o

Na classe o, a igualdade não ocorre a partir de algum valor n_0:

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 5n$.

Notação o

Na classe o, a igualdade não ocorre a partir de algum valor n_0:

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 9n$.

Na classe o, a igualdade não ocorre a partir de algum valor n_0:

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 15n$.

Para provar que uma função $f(n) \in o(g(n))$ basta provar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Notação ω

Reveja a definição da notação Ω:

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\Omega(g(n))$, se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \geq c \cdot g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

Note que na classe Ω, pode ocorrer a igualdade: $f(n) = c \cdot g(n)$. Veja alguns exemplos:

$$n^2 \in \Omega(n^2)$$

$$10n \in \Omega(n)$$

$$8n^3 \in \Omega(n^3)$$

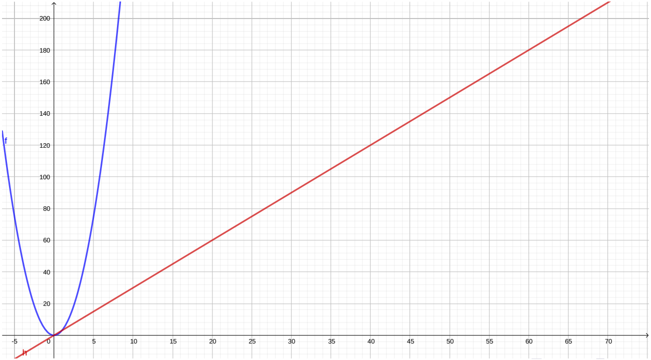
Notação ω

Na classe ω, a igualdade nunca ocorre:

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\omega(g(n))$, se para qualquer constante positiva c, $0 \leq c \cdot g(n) < f(n)$, para todo $n \geq n_0$, $n \geq 0$ e constante.

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 3n$.

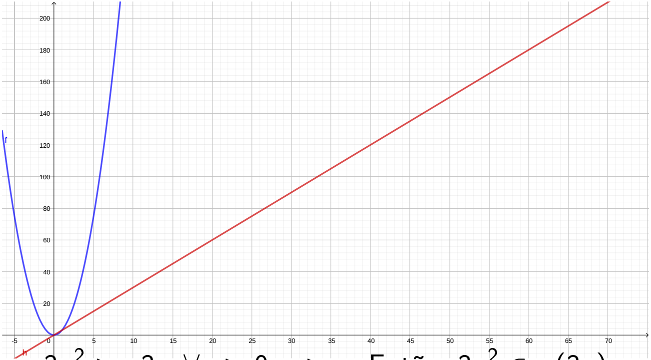


Notação ω

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\omega(g(n))$, se para qualquer constante positiva c, $0 \leq c \cdot g(n) < f(n)$, para todo $n \geq n_0$, $n \geq 0$ e constante.

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 3n$.



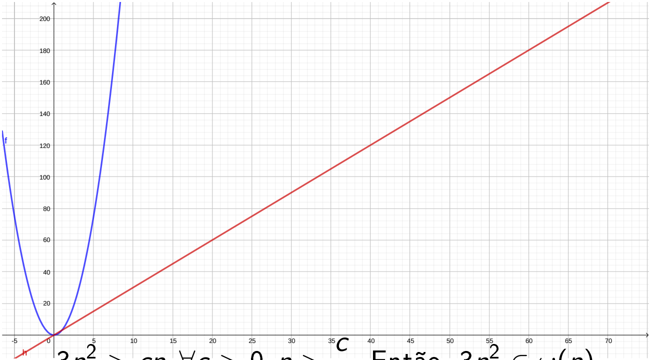
$3n^2 > c3n, \forall c > 0, n > c$. Então, $3n^2 \in \omega(3n)$

Notação ω

Definição

Uma função $f(n)$ pertence a $\omega(g(n))$, se para qualquer constante positiva c, $0 \leq c \cdot g(n) < f(n)$, para todo $n \geq n_0$, $n \geq 0$ e constante.

$f(n) = 3n^2$. $g(n) = 3n$.



$3n^2 > cn, \forall c > 0, n > \dfrac{c}{3}$. Então, $3n^2 \in \omega(n)$

Notação ω

Para provar que uma função $f(n) \in \omega(g(n))$ basta provar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

Exemplo 1

Prove que $n^2 + 2n + 1 \in O(n^2)$.

prova: Observe que quando $n \geq 1$, tem-se $2n \leq 2n^2$.

Então $n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n^2 + n^2 = 4n^2$.

Então existe uma constante $c = 4$ tal que $n^2 + 2n + 1 \leq c \cdot n^2 = 4n^2$, sempre que $n \geq 1$. $\square$

Exemplo 2

Prove que $7n^2 \in O(n^3)$.

prova: Observe que quando $n \geq 7$, tem-se $7n^2 \leq n^3$.

Então existe uma constante $c = 1$ tal que $7n^2 \leq c \cdot n^3 = n^3$, sempre que $n \geq 7$. $\square$

Exemplo 3

Prove que n^2 não pertence à $O(n)$.

prova: Suponha, por contradição que $n^2 \in O(n)$.

Então existe uma constante positiva c tal que $n^2 \leq c \cdot n$, para todo $n \geq k \geq 0$.

Quando $n = 0$, a desigualdade é satisfeita, porém, para qualquer valor de $n > 0$, tem-se: $\frac{n^2}{n} \leq c$.

Então, quando $n > 0$, existe uma constante c tal que $n < c$, para todo $n \geq k$, um absurdo, já que c é constante e n não é. $\square$

Exemplo 4

É verdade que $x^3 \in O(7x^2)$?

prova: Se $x^3 \in O(7x^2)$, então existem constantes c e k tal que $x^3 \leq c \cdot 7x^2$ para todo valor de $x \geq k$.

Suponha $x > 0$. Então, $\frac{x^3}{x^2} \leq 7c$, para todo $x \geq k$.

Então, $x \leq 7c$, para todo $x \geq k$. Um absurdo, já que $7c$ é constante e x não é. $\square$

Exemplo 5

Prove que $n! \in O(n^n)$.

prova: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \leq n^n$, para todo $n \geq 1$.

Então existe uma constante positiva $c = 1$ tal que $n! \leq c \cdot n^n$, para todo $n \geq 1$. $\square$

Exemplos de prova

Observe que $\log n! \leq \log n^n = n \log n$.

Então $\log n! \in O(n \log n)$.

Exemplo 6

Mostre que $n \in O(2^n)$.

prova: Basta provar que $n \leq 2^n$ para todo $n \geq 0$.
A prova é por indução. Quando $n = 0$, $0 \leq 1$, satisfazendo a inequação.

Suponha, por hipótese de indução que existe um inteiro k tal que $k \leq 2^k$.

Então, pela hipótese, $k + 1 \leq 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k$, para todo $k \geq 0$.

Logo, $k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Então existe uma constante $c = 1$ tal que $n \leq 2^n$ para todo $n \geq 0$. $\square$

Exemplo 7

Mostre que $\log n \in O(n)$.

prova: Pela prova anterior, $n \leq 2^n$, para todo $n \geq 0$.

Fazendo o log de ambos os lados, a desigualdade é preservada:

$\log n \leq \log 2^n$

Então, $\log n \leq n \log 2$, para $n \geq 1$.

Não importa qual a base do logaritmo, $\log 2$ é uma constante positiva.

Portanto, existe uma constante positiva $c = \log 2$ tal que $\log n \leq c \cdot n$, para todo $n \geq 1$. $\square$

Exemplo 8

Mostre que $3n \log(n!) + (n^2 + 3) \log n \in O(n^2 \log n)$.

prova: Como vimos, $\log(n!) \in O(n \log n)$.

Então, existe uma constante positiva c_1 tal que $\log(n!) \leq c_1 \cdot n \log n$, para todo $n \geq n_1$.

Note que $3n \in O(n)$, pois $3n \leq c_2 \cdot n$, para todo $n \geq 0$, quando $c_2 = 3$.

Então, $3n \log(n!) \leq (c_1 n \log n)(3n) = 3c_1 n^2 \log n$.

Então, existe uma constante positiva $c = 3c_1$ tal que $3n \log(n!) \leq cn^2 \log n$.

Portanto, $3n \log(n!) \in O(n^2 \log n)$.

Observe que $n^2 + 3 \leq n^2 + 3n^2 = 4n^2$, para todo $n \geq 0$. Então $n^2 + 3 \in O(n^2)$.

Por fim, $\log n \in O(\log n)$, para todo $n \geq 1$, pois $\log n = c_3 \log n$ quando $c_3 = 1$.

Lembre-se que se $f(n) \in O(p(n))$ e $g(n) \in O(q(n))$, então $f(n) \cdot g(n) \in O(p(n) \cdot q(n))$.

Portanto, $(n^2 + 3) \log n \in O(n^2 \log n)$.

Exemplos de prova

Lembre-se que se $f(n) \in O(p(n))$ e $g(n) \in O(q(n))$, então $f(n) + g(n) \in O(p(n) + q(n))$.

Portanto, $3n \log(n!) + (n^2 + 3) \log n \in O(n^2 \log n + n^2 \log n)$.

Então, $3n \log(n!) + (n^2 + 3) \log n \leq c \cdot 2(n^2 \log n)$.

Como $2c$ é uma constante, $3n \log(n!) + (n^2 + 3) \log n \in O(n^2 \log n)$.$\square$

Exemplo 9

Mostre que $8n^3 + 5n^2 + 7 \in \Omega(n^3)$.

prova: Observe que $8n^3 + 5n^2 + 7 \geq 8n^3$, para todo $n \geq 0$.

Então, existe uma constante positiva, $c = 8$ tal que $8n^3 + 5n^2 + 7 \geq c \cdot n^3$, para todo $n \geq 0$.

Portanto, pela definição da notação Ω, $8n^3 + 5n^2 + 7 \in \Omega(n^3)$. $\square$

Exemplo 10

Mostre que $8n^3 + 5n^2 + 7 \in \Theta(n^3)$.

Para provar que $f(n) \in \Theta(g(n))$, precisamos provar que $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $f(n) \in O(g(n))$.

Na prova anterior, mostramos que $8n^3 + 5n^2 + 7 \in \Omega(n^3)$.

Então, falta mostrar que $8n^3 + 5n^2 + 7 \in O(n^3)$.

Então, falta mostrar que $8n^3 + 5n^2 + 7 \in O(n^3)$.

Observe que $5n^2 \leq n^3$, para todo $n \geq 5$.

Observe que $7 \leq n^3$, para todo $n \geq 7$.

Então, $8n^3 + 5n^2 + 7 \leq 8n^3 + n^3 + n^3$, para todo $n \geq 7$.

Portanto, $8n^3 + 5n^2 + 7 \in O(n^3)$.

Como $8n^3 + 5n^2 + 7 \in \Omega(n^3)$ e $8n^3 + 5n^2 + 7 \in O(n^3)$, pode-se concluir que $8n^3 + 5n^2 + 7 \in \Theta(n^3)$. $\square$

Exemplo 11

Mostre que $n^2 \in o(n^3)$.

prova: Pela definição da notação o, é preciso mostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Exemplos de prova

Exemplo 12

Mostre que $n^2 \in \omega(n \log n)$.

prova: Pela definição da notação ω, é preciso mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^2} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \frac{\frac{d}{dn}\log n}{\frac{d}{dn} n} = \frac{\frac{d}{dn}\frac{\ln n}{\ln 10}}{1} = \frac{1}{(\ln 10)x} = 0 \ \Box$$