Matemática Discreta

Indução Matemática

Mayara Midori Omai e Sheila Morais de Almeida

UTFPR-PG

Abril - 2017

Indução Matemática

Se desejamos provar que uma propriedade $P(n)$ é verdade para números inteiros maiores ou iguais a 1, podemos executar os seguintes passos:

1. Provar que $P(1)$.
2. Mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$, para algum inteiro k.

   Ou seja, provar que se P é verdade para k, então P também é verdade para $k+1$.

Indução Matemática

1. Provar que $P(1)$.
2. Mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$, para algum inteiro k.

Dessa forma, pelo item (1), a afirmação $P(n)$ é verdade para $n = 1$.

Indução Matemática

1. Provar que $P(1)$.
2. Mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$, para algum inteiro k.

Pelo item (2), se $P(1)$ é verdade, então $P(2)$ é verdade.

Pelo item (2), já que $P(2)$ é verdade, então $P(3)$ é verdade.

E assim sucessivamente!

Consequentemente, pelas provas (1) e (2), $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n \geq 1$.

Indução Matemática

Passos para uma prova por indução matemática:

1. **Base:** provar que vale para o menor inteiro considerado no enunciado.
2. **Hipótese de indução:** considerar que o enunciado é verdadeiro para algum inteiro k.
3. **Passo da indução:** provar que quando o enunciado é verdade para k, ele também é verdade para $k + 1$.

Exemplo 1

Provar que $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Base: O primeiro número na sequência a ser somado é o número 1.

Então, devemos provar que a fórmula é verdade para $n = 1$, ou seja, que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, quando $n = 1$.

Pela definição de somatório, $\sum_{i=1}^{1} i = 1$.

Pela fórmula proposta, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Então, para $n = 1$, a fórmula apresenta o resultado esperado.

Exemplo 1

Provar que $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Hipótese de indução: Suponha que

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

para algum inteiro k.

Com essa suposição, vamos tentar provar o passo, ou seja, que a fórmula também vai responder corretamente se somarmos todos os números de 1 até $k+1$.

Exemplo 1

Provar que $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passo: Queremos saber quanto vale

$$\sum_{i=1}^{(k+1)} i = 1 + 2 + 3 \ldots k + (k+1).$$

Precisamos provar que o resultado desse somatório é igual ao resultado da fórmula quando $n = k + 1$.

Exemplo 1

Provar que $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passo:

Vamos manipular o somatório

$$1 + 2 + 3 \ldots k + (k+1)$$

para tentar chegar a mesma fórmula que nos foi dada no enunciado, quando $n = k + 1$.

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{k+1((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Exemplo 1

Provar que $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passo:

Assumindo que a hipótese de indução é verdade, então:

$$1 + 2 + 3 \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Exemplo 1

Provar que $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passo:

Note que o resultado do somatório dos números de 1 até $k+1$, é o mesmo que obtemos quando substituímos n por $k+1$ na fórmula do enunciado:

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{k+1((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, quando $n = k+1$.

Então a fórmula está correta para o caso $n = k+1$.

Como provamos que a fórmula vale para $n = 1$ e, se for verdade para um inteiro $n = k$, então é verdade para $n = k+1$, a indução está completa. $\square$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula para a soma dos n primeiros números ímpares.

$n = 1$ $\quad$ $1 = 1.$

$n = 2$ $\quad$ $1 + 3 = 4$

$n = 3$ $\quad$ $1 + 3 + 5 = 9$

$n = 4$ $\quad$ $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula para a soma dos n primeiros números ímpares.

$n = 1$ $\qquad 1 = 1.$

$n = 2$ $\qquad 1 + 3 = 4$

$n = 3$ $\qquad 1 + 3 + 5 = 9$

$n = 4$ $\qquad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Observando o padrão, é possível criar a seguinte conjectura:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2.$$

Exemplo 2

Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

Base: Já mostramos que a fórmula funciona para os casos $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ (slide anterior).

Exemplo 2

Prove que $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

Hipótese de indução: Suponha que

$$1+3+5+\ldots+2k-1=k^2,$$

para um inteiro k.

Exemplo 2

Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

Passo: Vamos provar que se a hipótese é verdadeira, então o resultado do somatório quando $n = k + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2(k+1) - 1$$

também é igual ao da fórmula n^2 quando $n = k + 1$.

$$n^2 = (k+1)^2.$$

Exemplo 2

Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

Passo:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 + 2(k+1) - 1$$

pela hipótese de indução, é igual a: $k^2 + 2(k+1) - 1$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Exemplo 2

Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

Passo:

Note que o resultado da soma dos n primeiros números ímpares é o mesmo que obtemos quando substituímos n por $k + 1$ na fórmula do enunciado:

$$1 + 3 + \ldots + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2.$$

Então a fórmula está correta para o caso $n = k + 1$.

Como provamos que a fórmula vale para $n = 1$ e, se for verdade para um inteiro $n = k$, então é verdade para $n = k + 1$, a indução está completa. $\square$

Exemplo 3

Prove que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Base: Observe que a sequência é a soma das potências 2^i para i variando de 0 até n.

Quando a soma contém apenas 1 número, trata-se da potência 2^0, então, considere $n = 0$.

$2^0 = 1$.

$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.

A soma da sequência e o valor dado pela fórmula são iguais. Então, a fórmula está correta quando $n = 0$.

Exemplo 3

Prove que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Hipótese de indução: Suponha que é verdade que

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1,$$

para algum inteiro k.

Exemplo 3

Prove que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Passo: Vamos manipular a soma

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{(k+1)}$$

para tentar chegar a mesma fórmula que nos foi dada no enunciado, quando $n = k + 1$.

$$2^{n+1} - 1 = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

Exemplo 3

Prove que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Passo: Assumindo que a hipótese de indução é verdade, então:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2(2^{k+1}) - 1 = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Como a fórmula dada no enunciado é igual à que encontramos para o caso $n = k + 1$, a mesma está correta. $\square$

Exemplo 4

Prove que $\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$.

Base: Observe que trata-se da soma dos termos de uma Progressão Geométrica na qual:

- o primeiro termo é a;
- a razão é r;
- a quantidade de termos que serão somados é n.

O enunciado apresenta uma fórmula para calcular o valor da soma dos termos ar^j, com j variando de 0 a n.

Exemplo 4

Prove que $\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

Base: Vamos verificar se a fórmula está correta quando $n = 0$:

Como $n = 0$, a sequência tem apenas o elemento $ar^0 = a$. Então a soma é a.

A fórmula diz que o resultado dessa soma é $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$, substituindo n por zero:

$$\frac{ar^{0+1} - a}{r - 1} = \frac{ar - a}{r - 1} = \frac{a(r - 1)}{r - 1} = \frac{a\cancel{(r - 1)}}{\cancel{r - 1}} = a$$

Então a fórmula está correta para o caso $n = 0$.

Exemplo 4

Prove que $\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

Hipótese de indução: Suponha que

$$\sum_{j=0}^{k} ar^j = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1},$$

para algum inteiro $k \geq 0$.

Exemplo 4

Prove que $\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

Passo: Vamos verificar se o valor da soma $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + ar^{k+1}$ é como descrito pela fórmula do enunciado, quando $n = k + 1$.

Pela hipótese de indução:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1}$$

$$\frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a + (r-1)ar^{k+1}}{r - 1} =$$

Exemplo 4

Prove que $\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

$$= \frac{ar^{k+1} - a + (r-1)ar^{k+1}}{r-1} = \frac{r(ar^{k+1}) - a}{r-1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}.$$

Note que se substituirmos o valor de n pelo valor de $k+1$ na fórmula $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$, obtemos o mesmo resultado:

$$\frac{ar^{(k+1)+1} - a}{r-1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}$$

.

Portanto, a fórmula está correta. $\square$

Exemplo 5

Prove que $n < 2^n$, para n inteiro positivo.

Base: Note que n deve ser inteiro e positivo. Vamos provar que o enunciado vale quando $n = 0$.

$0 < 2^0$

$0 < 1$

Portanto, é verdade neste caso.

Exemplo 5

Prove que $n < 2^n$, para n inteiro positivo.

Hipótese de indução: Suponha que $k < 2^k$, para algum valor inteiro positivo k.

Passo: Pela hipótese de indução, $k < 2^k$.

Somando 1 em ambos os lados, a desigualdade permanece:

$k + 1 < 2^k + 1$.

Como k é inteiro e positivo, sabemos que $k \geq 1$.

Portanto, $1 < 2^k$. Então, $2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$.

Portanto, $k + 1 < 2^k + 1 < 2^{k+1}$. $\square$

Exemplo 6

Prove que $2^n < n!$ para todo número positivo com $n \geq 4$.

Base: Como $n \geq 4$, devemos verificar se a fórmula está correta para $n = 4$.

$2^n = 2^4 = 16$

Pela fórmula: $n! = 4! = 4.3.2.1 = 24$

$16 < 24$, é verdade!

Então, a fórmula está correta para o caso em que $n = 4$.

Exemplo 6

Prove que $2^n < n!$ para todo número positivo com $n \geq 4$.

Hipótese de indução: Suponha que

$$2^k < k!$$

para algum inteiro $k \geq 4$.

Exemplo 5

Prove que $2^n < n!$ para todo número positivo com $n \geq 4$.

Passo: Agora, devemos mostrar que $2^{(k+1)} < (k+1)!$

Note que $2^{k+1} = 2.2^k$, e pela hipótese indutiva $2^k < k!$, então:

$2^{k+1} = 2.2^k < 2.k!$.

Como $k \geq 4$ sabemos que $2 < k+1$ e substituímos:

$2k+1 < 2.k! < (k+1).k! =$
$(k+1).(k).(k-1).(k-2)\ldots 3.2.1 = (k+1)!$

Logo, $2^{k+1} < (k+1)!$ $\square$

Exemplo 7

Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo número inteiro positivo n.

Base: Considerando $n = 0$, temos:

$0^3 - 0 = 0$

Como 0 é divisível por 3 então, a fórmula está correta para o caso base com $n = 0$.

Exemplo 7

Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo número inteiro positivo n.

Hipótese de indução: Suponha que

$$k^3 - k \text{ é divisível por } 3.$$

para algum inteiro $k \geq 0$.

Exemplo 7

Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo número inteiro positivo n.

Passo: Agora, devemos mostrar que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3. Note que:

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1\end{aligned}$$

Exemplo 7

Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo número inteiro positivo n.

Passo: Agora, devemos mostrar que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3.

Pela hipótese de indução $k^3 - k$ é divisível por 3, então $k^3 - k = 3x$, $x \in \mathbb{Z}$.

$$k^3 + 3k^2 + 3k + \cancel{1} - k - \cancel{1} = 3x + 3k^2 + 3k$$
$$= 3(x + k^2 + k)$$

Como $k, x \in \mathbb{Z}$, concluí-se que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3. $\square$

Referências

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).