Análise de Algoritmos

Algoritmo de Busca Binária

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

abril - 2018

Definição do problema

Problema da Busca em um Vetor Ordenado

Dado um vetor $V[1..n]$ com n números inteiros em ordem crescente e um número inteiro x, responder qual a posição de x no vetor.

V

2	5	9	11	14	16	19	23	27	32	36	40	48	51	58
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

x

48

Ideia do Algoritmo de Busca Binária

Dada uma posição i do vetor, $1 \leq i \leq n$, ocorre um dos casos:

- ou $x \leq V[i]$, ou seja, x deve estar no vetor $V[1..i]$;
- ou $x > V[i]$, ou seja, x deve estar no vetor $V[i+1..n]$.

Se $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, podemos ignorar metade do vetor para continuar a busca.

Ideia do Algoritmo de Busca Binária

V

2	5	9	11	14	16	19	23	27	32	36	40	48	51	58
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

x

48

Ideia do Algoritmo de Busca Binária

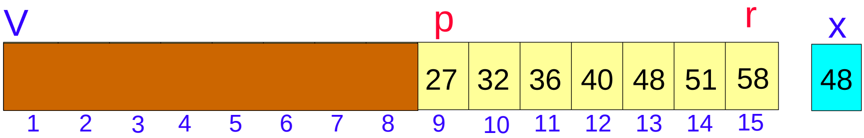
V p r

2	5	9	11	14	16	19	23	27	32	36	40	48	51	58
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

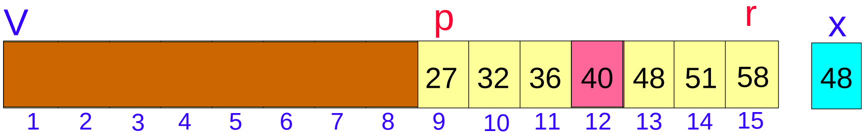
x

48

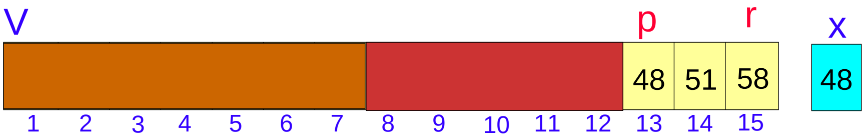
Ideia do Algoritmo de Busca Binária



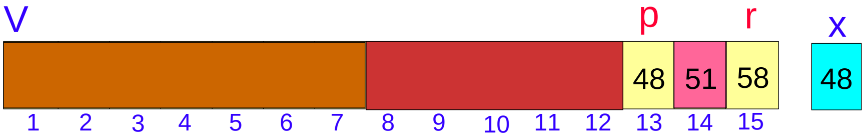
Ideia do Algoritmo de Busca Binária



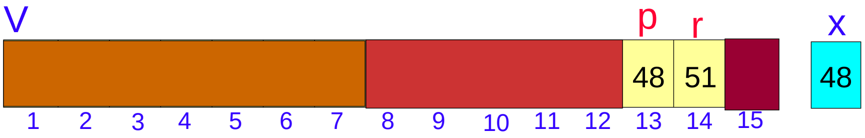
Ideia do Algoritmo de Busca Binária



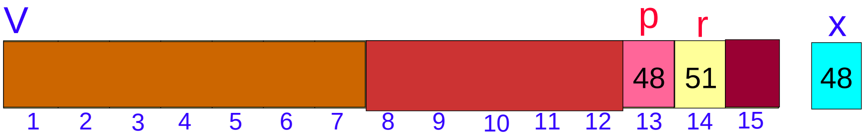
Ideia do Algoritmo de Busca Binária



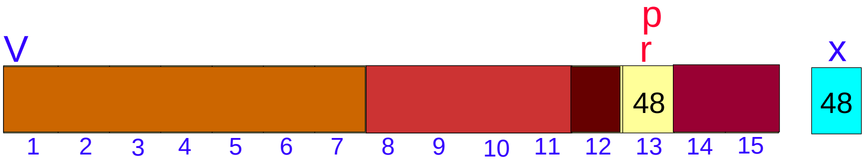
Ideia do Algoritmo de Busca Binária



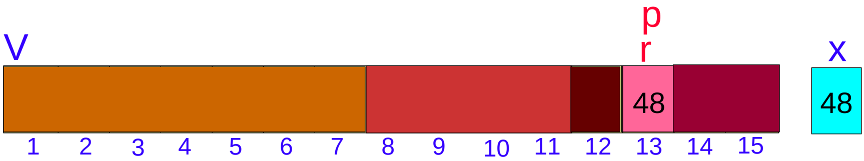
Ideia do Algoritmo de Busca Binária



Ideia do Algoritmo de Busca Binária



Ideia do Algoritmo de Busca Binária



Busca Binária: versão recursiva

Busca_Binaria($V[\,], x, p, r$)
 Se $p = r$, então:
  Se $V[p] = x$, então
   devolva p
  Senão
   devolva -1
 $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$
 Se $x \leq V[q]$, então:
  devolva Busca_Binaria($V[\,], x, p, q$)
 Senão
  devolva Busca_Binaria($V[\,], x, q+1, r$)

Busca Binária: versão recursiva

Análise para vetor com 1 elemento:

Busca_Binaria($V[\,], x, p, r$)
    Se $p = r$, então: 1
        Se $V[p] = x$, então 1
            devolva p
        Senão
            devolva -1
    $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$
    Se $x \leq V[q]$, então:
        devolva Busca_Binaria($V[\,], x, p, q$)
    Senão
        devolva Busca_Binaria($V[\,], x, q+1, r$)

Busca Binária: versão recursiva

Análise para vetor com $n > 1$ elementos:

Busca_Binaria($V[\,], x, p, r$)
  Se $p = r$, então: 1
    Se $V[p] = x$, então
      devolva p
    Senão
      devolva -1
  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ 3
  Se $x \leq V[q]$, então: 1
    devolva Busca_Binaria($V[\,], x, p, q$)
  Senão
    devolva Busca_Binaria($V[\,], x, q+1, r$)

Busca Binária: versão recursiva

Como calcular a complexidade de algoritmo recursivos?

Busca Binária: versão recursiva

Como calcular a complexidade de algoritmo recursivos?

Relação de recorrência!

Busca Binária: versão recursiva

Análise para vetor com $n > 1$ elementos:

Busca_Binaria$(V[\,], x, p, r)$

Se $p = r$, então: 1

devolva p

devolva p

Senão

devolva -1

$q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ 3

Se $x \leq V[q]$, então: 1

devolva Busca_Binaria$(V[\,], x, p, q)$ $\Longleftarrow$ uma chamada recursiva para um vetor com $\frac{n}{2}$ elementos

Senão

devolva Busca_Binaria$(V[\,], x, q+1, r)$ $\Longleftarrow$ só uma chamada! ou a de cima ou essa!

Busca Binária: versão recursiva

Como calcular a complexidade de algoritmo recursivos?

Relação de recorrência!

Seja $T(n)$, o tempo que Busca_Binaria( ) demora para resolver o problema no pior caso, para um vetor com n números.

Busca Binária: versão recursiva

Análise para vetor com $n > 1$ elementos:

Busca_Binaria$(V[\,], x, p, r)$ $T(n) =$

Se $p = r$, então: 1

devolva p

devolva p

Senão

devolva -1

$q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ 3

Se $x \leq V[q]$, então: 1

devolva Busca_Binaria$(V[\,], x, p, q)$ $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$

Senão

devolva Busca_Binaria$(V[\,], x, q+1, r)$ $\Longleftarrow$ só uma chamada!

ou a de cima ou essa!

Busca Binária: versão recursiva

Análise para vetor com $n > 1$ elementos:

Busca_Binaria($V[\,], x, p, r$) $T(n) =$

Se $p = r$, então: 1

devolva p

devolva p

Senão

devolva -1

$q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ 3

Se $x \leq V[q]$, então: 1

devolva Busca_Binaria($V[\,], x, p, q$) $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$

Senão

devolva Busca_Binaria($V[\,], x, q+1, r$) $\Longleftarrow$ só uma chamada!

ou a de cima ou essa!

Total: $T(n) = 5 + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$.

Relação de Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1; \\ 5 + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Se n não é uma potência de 2, então existe um inteiro k tal que $2^k < n < 2^{k+1}$.

Então $T(2^k) \leq T(n) \leq T(2^{k+1})$.

Então, é suficiente considerar que n é uma potência de 2 para uma previsão da função $T(n)$.

Relação de Recorrência

$$T(n) = 5 + T(\tfrac{n}{2})$$

$$T(\tfrac{n}{2}) = 5 + T(\tfrac{n}{4})$$

Então,

$$T(n) = 5 + T(\tfrac{n}{2}) = 5 + (5 + T(\tfrac{n}{4}))$$

$$T(n) = 5 + T(\tfrac{n}{2}) = 2(5) + T(\tfrac{n}{2^2})$$

Relação de Recorrência

$$T(n) = 5 + T(\frac{n}{2}) = 2(5) + T(\frac{n}{4})$$

$$T(\frac{n}{4}) = 5 + T(\frac{n}{8})$$

Então,

$$T(n) = 2(5) + (5 + T(\frac{n}{8}))$$

$$T(n) = 3(5) + T(\frac{n}{8})$$

Relação de Recorrência

$$T(n) = 2(5) + T(\tfrac{n}{2^2})$$

$$T(n) = 3(5) + T(\tfrac{n}{2^3})$$

Generalizando...

$$T(n) = k(5) + T(\tfrac{n}{2^k})$$

Sabemos resolver $T(1)$, então queremos que $\frac{n}{2^k} = 1$.

Relação de Recorrência

$$\frac{n}{2^k} = 1.$$

$$n = 2^k$$

$$k = \log_2 n$$

Relação de Recorrência

$$T(n) = k(5) + T(\frac{n}{2^k})$$

$$k = \log_2 n$$

Então,

$$T(n) = 5\log_2 n + T(1) = 5\log_2 n + 1$$

Busca Binária: versão recursiva

Busca_Binaria$(V[\ ], x, p, r)$ $\qquad T(n) =$

Se $p = r$, então: 1

devolva p

$q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ 3

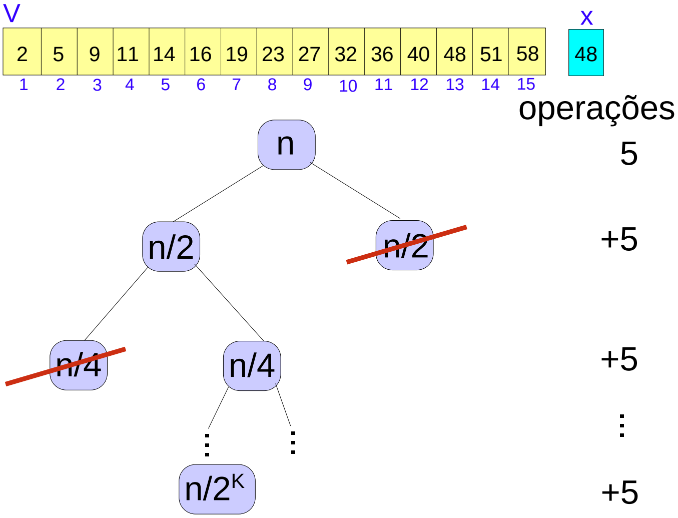
Se $x \leq V[q]$, então: 1

devolva Busca_Binaria$(V[\ ], x, p, q)$ $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$

Senão

devolva Busca_Binaria$(V[\ ], x, q+1, r)$

Busca Binária: árvore de recursão



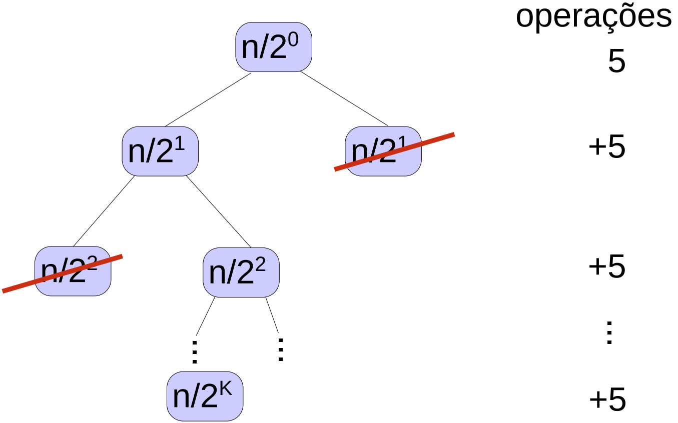
Busca Binária: árvore de recursão

V

2	5	9	11	14	16	19	23	27	32	36	40	48	51	58
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

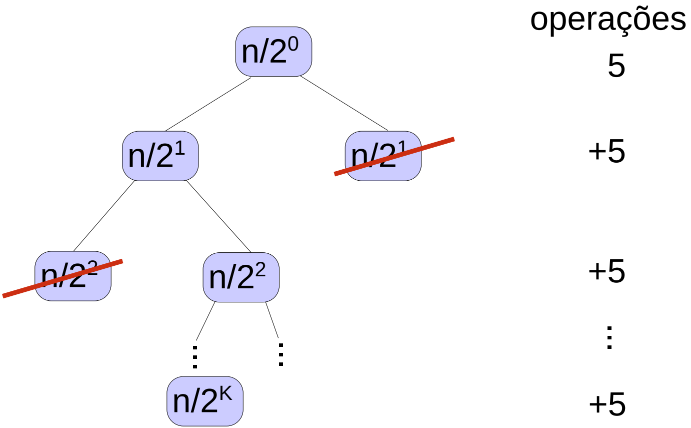
x

48



Busca Binária: árvore de recursão

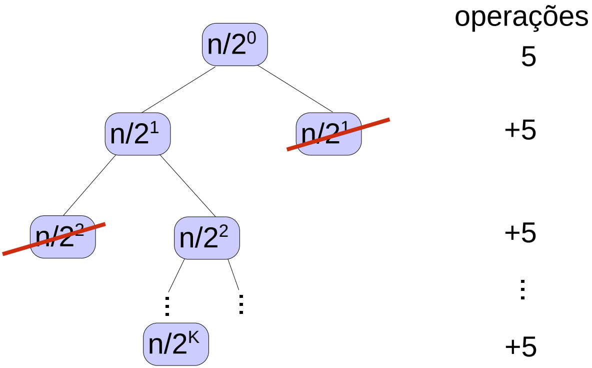
O algoritmo termina quando $\frac{n}{2^k} = 1$. Qual a altura da árvore?



Busca Binária: árvore de recursão

O algoritmo termina quando $\frac{n}{2^k} = 1$. Qual a altura da árvore?

Se a raiz está na altura zero, então a altura da árvore é k.



Busca Binária: árvore de recursão

Quando $\frac{n}{2^k} = 1$. Qual a altura da árvore?

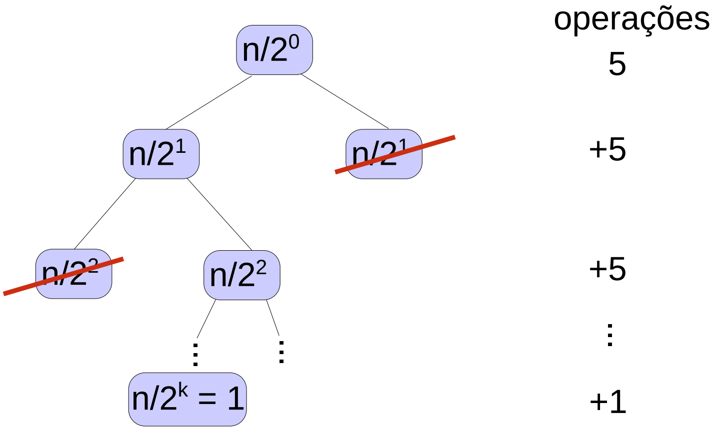
$n = 2^k$

$\log_2 n = k$

A altura é $k = \log n$.

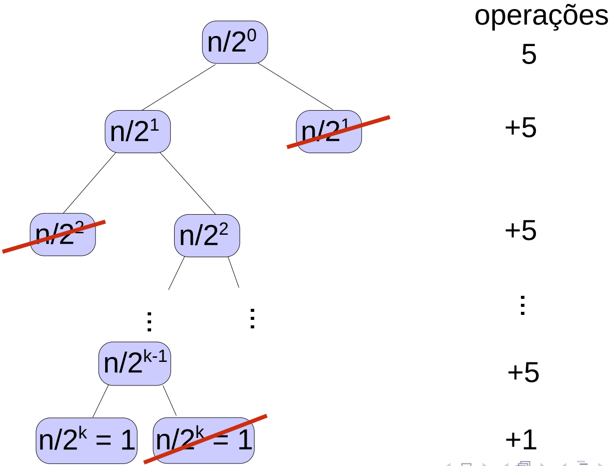
Busca Binária: árvore de recursão

Quando $n = 2^k$, o vetor tem tamanho 1. No algoritmo, ocorre apenas 1 comparação.



Busca Binária: árvore de recursão

O algoritmo temrina quando $k = \log n$.
Então são $5k + 1 = 5(\log n) + 1$ operações.



Busca Binária: árvore de recursão

$$T(n) = 5k + 1$$

Como $k = \log_2 n$

$$T(n) = 5(\log_2 n) + 1$$

Busca Binária: versão iterativa

Algoritmo Busca Binária

Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$

$r \leftarrow n$

Enquanto $p < r$ faça:

  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$

  Se $x \leq V[q]$, então:

    $r \leftarrow q$

  Senão

    $p \leftarrow q + 1$

devolva p

Busca Binária: versão iterativa

Quantas instruções de atribuição e comparação são executadas no pior caso?

Algoritmo Busca Binária

Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$

$r \leftarrow n$

Enquanto $p < r$ faça:

  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$

  Se $x \leq V[q]$, então:

    $r \leftarrow q$

  Senão

    $p \leftarrow q + 1$

devolva p

Busca Binária: versão iterativa

Quantas instruções de atribuição e comparação são executadas no pior caso?

Algoritmo Busca Binária

Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$ 1

$r \leftarrow n$ 1

Enquanto $p < r$ faça:

  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$

  Se $x \leq V[q]$, então:

    $r \leftarrow q$

  Senão

    $p \leftarrow q + 1$

devolva p

Busca Binária: versão iterativa

Algoritmo Busca Binária
Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$ 1
$r \leftarrow n$ 1
Enquanto $p < r$ faça: $(\log n) + 1$
$q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$
Se $x \leq V[q]$, então:
$r \leftarrow q$
Senão
$p \leftarrow q + 1$
devolva p

Busca Binária: versão iterativa

Algoritmo Busca Binária
Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$ 1
$r \leftarrow n$ 1
Enquanto $p < r$ faça: $(\log n) + 1$
  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ $3 \log n$
  Se $x \leq V[q]$, então: $\log n$
    $r \leftarrow q$
  Senão
    $p \leftarrow q + 1$
devolva p

Busca Binária: versão iterativa

Algoritmo Busca Binária
Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$ 1
$r \leftarrow n$ 1
Enquanto $p < r$ faça: $(\log n) + 1$
  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ $3 \log n$
  Se $x \leq V[q]$, então: $\log n$
    $r \leftarrow q$ $\Longleftarrow$ só uma atribuição (essa ou a debaixo)
  Senão
    $p \leftarrow q + 1$
devolva p

Busca Binária: versão iterativa

Algoritmo Busca Binária
Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$ 1
$r \leftarrow n$ 1
Enquanto $p < r$ faça: $(\log n) + 1$
  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ $3 \log n$
  Se $x \leq V[q]$, então: $\log n$
    $r \leftarrow q$ $\Longleftarrow$ só uma atribuição (essa ou a debaixo)
  Senão
    $p \leftarrow q + 1$ $2 \log n$
devolva p

Busca Binária: versão iterativa

Algoritmo Busca Binária
Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$ 1
$r \leftarrow n$ 1
Enquanto $p < r$ faça: $(\log n) + 1$
$q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ $3 \log n$
Se $x \leq V[q]$, então: $\log n$
$r \leftarrow q$ 0
Senão
$p \leftarrow q + 1$ $2 \log n$
devolva p

Busca Binária: versão iterativa

Algoritmo Busca Binária
Entrada: vetor $V[1..n]$ de inteiros; número x inteiro

$p \leftarrow 1$ 1
$r \leftarrow n$ 1
Enquanto $p < r$ faça: $(\log n) + 1$
  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{r+p}{2} \right\rfloor$ $3 \log n$
  Se $x \leq V[q]$, então: $\log n$
    $r \leftarrow q$ 0
  Senão
    $p \leftarrow q + 1$ $2 \log n$
devolva p

Total: $7(\log n) + 3$.