Matemática Discreta

Matemática Discreta

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

agosto - 2016

Terminologia

Teoremas são enunciados matemáticos que podem ser provados, geralmente expressos na forma $P \rightarrow Q$.

P é chamada de **hipótese**.

Q é chamada de **conclusão**.

Geralmente os teoremas são os resultados mais importantes de um estudo.

Outros enunciados menos importantes que podem ser provados e que são utilizados na prova de um teorema são chamados de **Proposição** ou **Lema**.

Terminologia

Para mostrar que um Teorema, um Lema ou uma Proposição é verdade, precisamos apresentar uma prova.

A prova é um argumento válido que garante a veracidade do enunciado proposto em todos os casos que o mesmo abrange.

Técnicas de Prova

Definição

Uma prova é um argumento válido que mostra a veracidade de um enunciado matemático.

Para provar algo, pode-se assumir como verdade:

- a hipótese,
- axiomas,
- resultados que tenham sido provados anteriormente.

Com esses fatos e com regras de derivação, resta mostrar a veracidade da tese.

Terminologia

Axiomas são verdades absolutas, não precisam ser provados.

Corolários são consequências diretas de teoremas que já foram provados.

Conjecturas são hipóteses que ainda não foram provadas, mas que acredita-se que sejam verdadeiras devido a algumas evidências parciais ou intuição de algum especialista no assunto.

Terminologia

Sobre conjecturas:

- Quando uma conjectura é provada, ela se torna um teorema.
- Se um contraexemplo para uma conjectura for apresentado, a conjectura é falsa e não é um teorema.

Terminologia

Exemplo:

Teorema

Se x e y são números reais positivos e $x > y$, então $x^2 > y^2$.

Para provar esse teorema, podemos assumir que a hipótese é verdadeira:

- x é um número real positivo;
- y é um número real positivo;
- $x > y$.

Terminologia

Além da hipótese, podemos usar como axiomas algumas propriedades dos números reais:

1. Se $x > y$, então $xx > xy$.
2. Da mesma forma, se $x > y$, então $xy > yy$.
3. De (1) e (2), pode-se concluir que $xx > xy > yy$.
4. Portanto, $xx > yy$.

Terminologia

Partindo da hipótese e de propriedades conhecidas (que são axiomas, lemas, proposições e teoremas já provados), usamos regras de derivação para garantir a conclusão do Teorema.

(No exemplo, levam a concluir que $x^2 > y^2$.)

Ao chegar nessa conclusão, desde que as regras de derivação sejam válidas e tenham se baseado em fatos verdadeiros, o Teorema está provado.

Terminologia

Conjectura

Se um número n é divisível por 6, então n é divisível por 3.

Podemos testar vários casos:
12 é divisível por 6 $\rightarrow 12 = 3 \times 4$
42 é divisível por 6 $\rightarrow 42 = 3 \times 14$
48 é divisível por 6 $\rightarrow 48 = 3 \times 16$

Quanto mais casos encontramos satisfazendo as condições, mais confiantes ficamos de que é possível provar a conjectura.

Concluir algo baseado na experiência é um processo chamado de **Raciocínio Indutivo**.

Terminologia

Conjectura

Se um número n é divisível por 6, então n é divisível por 3.

Mas alguns casos não bastam para termos certeza de que a conjectura é sempre verdadeira.

Para prová-la, todo o universo que seu enunciado abrange deve ser verificado.

(Nesse caso, para qualquer que seja o número divisível por 6, a conjectura precisa ser verdadeira).

Apresentar uma prova ou um contraexemplo para a conjectura, é um processo chamado de **Raciocínio Dedutivo**.

Terminologia

Para mostrar que uma conjectura $P \to Q$ é falsa, basta apresentar um contraexemplo.

Definição

Um contraexemplo é um caso em que P é verdade e Q é falso.

Forneça contra-exemplos para as seguintes sentenças:

- Se n é um inteiro par, então n não é primo.
- Se n^2 é ímpar, então n é múltiplo de 3.

Terminologia

Para mostrar que uma conjectura $P \to Q$ é falsa, basta apresentar um contraexemplo.

Definição

Um contraexemplo é um caso em que P é verdade e Q é falso.

Forneça contra-exemplos para as seguintes sentenças:

- Se n é um inteiro par, então n não é primo. $n = 2$
- Se n^2 é ímpar, então n é múltiplo de 3. $n = 1$

Técnicas de Prova

Para provar a proposição $\forall x : P(x) \rightarrow Q(x)$.

Deve-se provar que $P(c) \rightarrow Q(c)$ é verdade, para uma variável c que representa qualquer elemento do domínio.

Dizemos: "Seja c um elemento qualquer do domínio..."

Técnicas de Prova

Lembre-se das aulas anteriores: $P(c) \to Q(c)$ é verdade, a menos que $P(c)$ seja verdade e $Q(c)$ seja falso.

$P(c)$	$Q(c)$	$P(c) \to Q(c)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Então para provar que $P(c) \to Q(c)$ é verdade, só precisamos provar que $Q(c)$ é verdade quando $P(c)$ é verdade.

Prova Direta

Para construir uma prova direta para uma afirmação do tipo $A \rightarrow B$:

- suponha que A é verdade;
- os passos seguintes são construídos utilizando-se regras de derivação;
- a última delas deve implicar que B também é verdade.

Prova Direta

Uma prova direta mostra que uma afirmação $A \rightarrow B$ é verdade apresentando argumentos de que se A é verdade, então B tem que ser verdade também.

Assim, a combinação A verdade e B falso nunca ocorre.

Em uma prova direta, nós consideramos que A é verdade e usamos axiomas, definições, e resultados provados anteriormente, junto com regras de inferência, para mostrar que B também é verdade.

Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é divisível por um número k se $n = ky$, para algum inteiro y.

Dizemos também que n é múltiplo de k.

Prova Direta

Exemplo 1

Conjectura

Se um número n é divisível por 6, então n é divisível por 3.

Prova Direta: Seja n um número divisível por 6.

Então, por definição, $n = 6y$, para algum inteiro y.

Como $6 = 3 \times 2$, podemos escrever $n = 6y = 3 \cdot 2 \cdot y = 3(2y)$.

Então $n = 3z$, onde $z = 2y$ é um inteiro. Então, por definição, n é divisível por 3. $\square$

Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é par se existe um inteiro k tal que $n = 2k$, e n é ímpar se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

Note que um inteiro ou é par ou é ímpar, e nenhum inteiro é par e ímpar.

Prova Direta

Exemplo 2

Teorema

Se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.

Demonstração: Suponha que a hipótese é verdadeira, ou seja, n é ímpar.

Pela definição de um inteiro ímpar, tem-se $n = 2k + 1$, onde k é algum inteiro.

Nós queremos mostrar que n^2 também é ímpar. Podemos elevar os dois lados da equação $n = 2k + 1$ ao quadrado para obter uma nova equação que expressa n^2.

Prova Direta

Então, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Como k é inteiro, $2k^2 + 2k$ é um número inteiro.

Vamos chamar $2k^2 + 2k$ de z.

Então $n^2 = 2z + 1$.

Por definição de número ímpar, podemos concluir que n^2 é ímpar (n^2 é duas vezes um inteiro mais 1).

Portanto, se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar. $\square$

Prova Direta

Exemplo 3

Teorema

Se m e n são números pares, então mn também é par.

Demonstração: Para produzir uma prova direta desse teorema, suponha que a hipótese é verdadeira, ou seja, considere que n e m são números pares.

Pela definição de números pares, sabemos que existem dois números inteiros s e t tais que $m = 2s$ e $n = 2t$.

O objetivo dessa prova é mostrar que mn é par quando m e n são pares.

Prova Direta

Para conseguir uma equação com mn, vamos multiplicar as duas equações $m = 2s$ e $n = 2t$.

Com essa multiplicação, obtemos $mn = 2s \cdot 2t$, o que implica que $mn = 2s \cdot 2t = 2(2st)$.

Pela definição de número par, isso implica que mn também é par, pois é um número inteiro $(2st)$ multiplicado por 2.

Portanto, se m e n são pares, então mn também é par. $\square$

Exemplos de Provas

Definição

O número real r é racional se existem inteiros p e q com $q \neq 0$ tais que $r = \frac{p}{q}$. Um número real que não é racional é chamado de irracional.

Prova Direta

Exemplo 4

Provar: A soma de dois números racionais é racional.

(Note que nós queremos provar que "Se r e s são números racionais quaisquer, então $r + s$ é racional.")

Prova Direta. Considere que r e s são números racionais.

Pela definição de números racionais, isso implica que:

- existem números inteiros, p e q, com $q \neq 0$, tais que $r = \frac{p}{q}$,
- existem inteiros t e u, com $u \neq 0$, tais que $s = \frac{t}{u}$.

Podemos usar essa informação para mostrar que $r + s$ é racional?

Prova Direta

O passo óbvio é somar $r = \frac{p}{q}$ com $s = \frac{t}{u}$, para obter

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}.$$

Como $q \neq 0$ e $u \neq 0$, isso implica que $qu \neq 0$.

Consequentemente, pode-se expressar $r + s$ como uma fração de dois inteiros, $pu + qt$ e qu, onde $qu \neq 0$.

Então, pela definição de números racionais, $r + s$ é racional.

Portanto, a soma de dois números racionais é racional. $\square$

Provas Indiretas

Provas diretas assumem que a hipótese é verdadeira e usam regras de derivação para mostrar que a conclusão do teorema é verdadeira.

Às vezes, não é possível fazer a prova direta de um teorema.

Provas Indiretas

Provas de teoremas que não são diretas, ou seja, que não começam assumindo que a hipótese é verdadeira e terminam mostrando que a conclusão do teorema é verdadeira, são chamadas provas indiretas.

Veremos as seguintes técnicas de provas indiretas: contraposição e contradição.

Prova por Contraposição

A prova por contraposição faz uso do fato de que a proposição $A \to B$ é equivalente à sua contrapositiva $\neg B \to \neg A$.

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \to \neg A$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Prova por Contraposição

Observação

Pela equivalência entre essas proposições, $A \to B$ pode ser provada mostrando-se que sua contrapositiva, $\neg B \to \neg A$, é verdade.

Em uma prova por contraposição de $A \to B$, deve-se:

1. considerar que $\neg B$ é verdade,
2. usar axiomas, definições e teoremas já provados, junto com regras de derivação, e
3. concluir que $\neg A$ é verdade.

Prova por Contraposição

Exemplo 5

Provar: Se n é um inteiro e $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar.

1^a **tentativa:** Prova direta. Suponha que a hipótese é verdadeira, ou seja, $3n+2$ é um inteiro ímpar. Isso significa que $3n+2 = 2k+1$, para algum inteiro k.

Como esse fato pode ajudar a mostrar que n é ímpar?

Vemos que $3n = 2k-1$, ou seja, $3n$ é ímpar, mas não parece haver nenhuma forma direta de concluir que n é ímpar.

Prova por Contraposição

Já que a tentativa de prova direta falhou, nossa próxima tentativa é a prova por contraposição.

Vamos provar que $\neg B \rightarrow \neg A$.

1. considerar que $\neg B$ é verdade,
2. usar axiomas, definições e teoremas já provados, junto com regras de derivação, e
3. concluir que $\neg A$ é verdade.

Prova por Contraposição

Exemplo 5

Provar: Se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

2^a **tentativa:** Prova por contraposição. Considere que a conclusão da proposição "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar" é falsa, ou seja, assuma que n é par.

Então, por definição de número par, $n = 2k$ para algum inteiro k.

Então, $3n + 2 = 3(2k) + 2$.

$3n + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ e, como k é inteiro, $3k + 1$ é inteiro.

Portanto, $3n + 2$ é par (pois é um múltiplo de dois), e então não é ímpar.

Prova por Contraposição

Portanto, $3n + 2$ é par (pois é um múltiplo de dois), e então não é ímpar.

Isso é uma negação da hipótese do teorema! Provamos que $\neg A$ é verdade.

Portanto, se n é par, então $3n + 2$ é par.

Pela equivalência da contraposição, concluí-se que se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar. $\square$

Prova por Contraposição

Exemplo 6

Provar: Se n é um inteiro divisível por 6, então n é divisível por 3.

Prova por contraposição: Seja n um número que não é divisível por 3. Então, para todo k inteiro $n \neq 3k$.

Então, $n \neq 3(2y)$, para todo y inteiro, pois $2y$ é um número inteiro.

Então, $n \neq 6y$, para todo y inteiro. Então nao existe y inteiro tal que $n = 6y$.
Portanto n não é divisível por 6. $\square$

Equivalência entre Implicações

Observe que a proposição $A \to B$ não é equivalente a $B \to A$.

A	B	$A \to B$	$B \to A$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Exemplo 7: A implicação "Se $a > 5$, então $a > 2$" é verdadeira.

A sua recíproca "Se $a > 2$, então $a > 5$" é falsa.

Prova por Contradição

Suponha que queremos provar que uma proposição P é verdadeira.

Além disso, suponha que conseguimos encontrar uma contradição B tal que $\neg P \to B$ é verdade.

Como B é falsa, mas $\neg P \to B$ é verdade, nós podemos concluir que $\neg P$ é falsa, o que significa que P é verdade.

Como podemos encontrar uma contradição B que nos ajude a provar que P é verdade?

Prova por Contradição

Como a afirmação $A \wedge \neg A$ é uma contradição para qualquer proposição A, pode-se provar que P é verdade mostrando que $\neg P \to (A \wedge \neg A)$ é verdade para alguma afirmação A.

Provas desse tipo são chamadas de **Provas por Contradição**.

Observação

Provas por contradição são um outro tipo de prova indireta.

Prova por Contradição

Provas por contradição podem ser usadas para provar afirmações condicionais.

Nessas provas:

1. supomos verdadeira: a hipótese do teorema e a negação da conclusão.
2. apresentamos uma contradição.

Prova por Contradição

A razão para essas provas serem válidas está na equivalência lógica entre $P \rightarrow B$ e $(P \wedge \neg B) \rightarrow F$.

P	B	$P \rightarrow B$	$P \wedge \neg B$	$P \wedge \neg B \rightarrow F$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Prova por Contradição

Note que podemos usar a prova por contraposição para construir uma prova por contradição.

Na prova de $P \rightarrow B$ por contraposição:

1. Assumimos que $\neg B$ é verdade.
2. Mostramos que $\neg P$ também deve ser verdade.

Prova por Contradição

Note que podemos usar a prova por contraposição para construir uma prova por contradição.

Para reescrever a prova por contraposição de $P \to B$ como uma prova por contradição, nós

1. supomos que ambos, P e $\neg B$ são verdade.
2. usamos os passos da prova de $\neg B \to \neg P$ para mostrar que $\neg P$ é verdade.
3. concluímos que $P \wedge \neg P$ é verdade, uma contradição. Isso completa a prova.

Prova por Contradição

Exemplo 8

Provar: Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração: Seja A a proposição "$3n + 2$ é ímpar" e B a proposição "n é ímpar."

Para construir uma prova por contradição, suponha que ambas, A e $\neg B$, são verdades.

Ou seja, suponha que $3n + 2$ é ímpar e que n não é ímpar.

Prova por Contradição

Suponha que $3n + 2$ é ímpar e que n não é ímpar.

Como n não é ímpar, nós sabemos que n é par.

Como n é par, existe um inteiro k tal que $n = 2k$.

Isso implica que $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$.

Prova por Contradição

Como $3n+2$ é $2t$, onde t é inteiro $(t = 3k+1)$, $3n+2$ é par.

Note que a afirmação "3n + 2 é par" é $\neg A$, já que um inteiro é par se, e somente se, não é ímpar.

Como ambas A e $\neg A$ são verdade, temos uma contradição.

Isso completa a prova por contradição de que se $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar. $\square$

Prova por Contradição

Exemplo 9

Provar que pelo menos 4 de quaisquer 22 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.

Demonstração: Considere a proposição "Se 22 dias quaisquer são escolhidos, então pelo menos 4 devem cair no mesmo dia da semana." Sejam P: "22 dias quaisquer são escolhidos" e Q: "pelo menos 4 dias caem no mesmo dia da semana."

Suponha que $P \land \neg Q$ é verdade.

Isso significa que 22 dias são escolhidos e no máximo três dias caem no mesmo dia da semana.

Prova por Contradição

Vamos encontrar uma contradição para a afirmação: "22 dias são ecolhidos e no máximo 3 dias caem no mesmo dia da semana".

Como há sete dias da semana, é possível escolher um conjunto de no máximo 21 dias de forma que no máximo 3 dias caiam em cada dia da semana. (Princípio da Casa dos Pombos)

Então, se 22 dias são escolhidos, sempre existem 4 dias que caem no mesmo dia da semana, uma contradição.

Portanto, provamos que pelo menos 4 de 22 dias escolhidos caem no mesmo dia da semana. $\square$

Referências

Judith L. GERSTING. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. LTC, 3ª edição, 1995.

Kenneth ROSEN.**Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).