Matemática Discreta

Cálculo de Predicados

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

março - 2017

Quantificadores Agrupados

Dois quantificadores estão **agrupados** se um está no escopo do outro.

Exemplo: $\forall x \exists y (x + y = 0)$.

Quantificadores Agrupados

Dois quantificadores estão **agrupados** se um está no escopo do outro.

Exemplo: $\forall x \exists y (x + y = 0)$.

Escopo de $\exists y$: $(x + y = 0)$.

Quantificadores Agrupados

Dois quantificadores estão **agrupados** se um está no escopo do outro.

Exemplo: $\forall x \exists y(x + y = 0)$.

Escopo de $\exists y$: $(x + y = 0)$.

Escopo de $\forall x : \exists y(x + y = 0)$.

Quantificadores Agrupados

Exemplo

Domínio: todos os números reais.

$\forall x \forall y (x + y = y + x)$.

O que significa?

Quantificadores Agrupados

Exemplo

Domínio: todos os números reais.

$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = x + (y + z))$.

O que significa?

Quantificadores Agrupados

Exemplo

Domínio: todos os números reais.

$\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow xy < 0)$.

O que significa?

Ordem dos Quantificadores

Se os quantificadores não são todos universais (ou todos existenciais) então a ordem dos quantificadores faz diferença na interpretação.

Exemplo: seja $P(x, y) : x + y = y + x$ e o domínio dos números reais.

Pergunta: Qual o valor verdade para $\forall x \forall y P(x, y)$?

Pergunta: Qual o valor verdade para $\forall y \forall x P(x, y)$?

Ordem dos Quantificadores

Se os quantificadores não são todos universais (ou todos existenciais) então a ordem dos quantificadores faz diferença na interpretação.

Exemplo: seja $Q(x, y) : x + y = 0$ e o domínio dos números reais.

Pergunta: Qual o valor verdade para $\exists y \forall x Q(x, y)$?

Pergunta: Qual o valor verdade para $\forall x \exists y Q(x, y)$?

Negação com Quantificadores Agrupados

Quando a sentença é falsa?

- $\forall x \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y)$;
- $\exists x \forall y P(x, y)$;
- $\exists x \exists y P(x, y)$;

Negação com Quantificadores Agrupados

Quando a sentença é falsa?

- $\exists y \forall x P(x, y)$

- $\forall x \exists y P(x, y)$

Negação com Quantificadores Agrupados

Quando a sentença é falsa?

- $\exists y \forall x P(x, y)$
  $\forall x \exists y P(x, y)$.

- $\forall x \exists y P(x, y)$
  $\exists y \forall x P(x, y)$.

Negação com Quantificadores Agrupados

Exemplo $Q(x, y, z) : x + y = z$.

Domínio: números reais.

Quando a sentença é falsa?

- $\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$;
- $\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$;

Traduação

Considere:
$C(x)$: x tem um computador.

$F(x, y)$: x e y são amigos.

Domínio: estudantes da UTFPR.

Traduza: $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y)))$.

Traduação

Considere:
$F(x, y)$: x e y são amigos.

Domínio: estudantes da UTFPR.

Traduza: $\exists x \forall y \forall z (F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge y \neq z \rightarrow \neg F(y, z))$.

Traduação

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

Traduação

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

$P(x)$: x é do sexo feminino.

Traduação

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

$P(x)$: x é do sexo feminino.

$Q(x)$: x tem filhos.

Traduação

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

$P(x)$: x é do sexo feminino.

$Q(x)$: x tem filhos.

$M(x, y)$: x é mãe de y.

Traduação

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

$P(x)$: x é do sexo feminino.

$Q(x)$: x tem filhos.

$M(x, y)$: x é mãe de y.

$\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \exists y M(x, y))$.

Traduação

Traduza: Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ela é mãe de alguém.

$P(x)$: x é do sexo feminino.

$Q(x)$: x tem filhos.

$M(x, y)$: x é mãe de y.

$\forall x(P(x) \land Q(x) \to \exists y M(x, y))$.

Como y não aparece em $P(x) \land Q(x)$, podemos reescrever: $\forall x \exists y(P(x) \land Q(x) \to M(x, y))$.

Traduação

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

Traduação

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

$P(x, y)$: x é o melhor amigo de y. **Atenção:** não inclua quantificadores nos predicados!

Traduação

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

$P(x, y)$: x é o melhor amigo de y. **Atenção:** não inclua quantificadores nos predicados!

$\forall y \exists_1 x P(x, y)$.

Traduação

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

$P(x, y)$: x é o melhor amigo de y. **Atenção:** não inclua quantificadores nos predicados!

$\forall y \exists_1 x P(x, y)$.

$\forall y \exists x (P(x, y) \wedge (\exists z P(z, y) \rightarrow z = x))$.

Traduação

Traduza: Todos têm exatamente um melhor amigo.

$P(x, y)$: x é o melhor amigo de y. **Atenção:** não inclua quantificadores nos predicados!

$\forall y \exists_1 x P(x, y)$.

$\forall y \exists x (P(x, y) \wedge (\exists z P(z, y) \rightarrow z = x))$.

$\forall y \exists x (P(x, y) \wedge (\forall z (z \neq x \rightarrow \neg P(z, y))))$.

Traduação

Traduza: Existe uma mulher que já tomou um avião em todas as linhas aéreas do mundo.

$P(a)$: a é mulher.

$Q(a, b)$: a tomou um avião b.

$R(a, b)$: a é um avião da linha aérea b.

$\exists x(P(x) \wedge \forall y \exists z(Q(x, z) \wedge R(z, y)))$.

$\exists x \forall y \exists z(P(x) \wedge Q(x, z) \wedge R(z, y))$.

Negação de Quantificadores Agrupados

Negue a sentença: $\forall x \exists y (xy = 1)$.

Negação de Quantificadores Agrupados

Negue a sentença: $\forall x \exists y (xy = 1)$.

$\neg(\forall x \exists y (xy = 1)) \equiv \exists x \neg(\exists y (xy = 1))$

Negação de Quantificadores Agrupados

Negue a sentença: $\forall x \exists y (xy = 1)$.

$\neg(\forall x \exists y (xy = 1)) \equiv \exists x \neg(\exists y (xy = 1))$

$\equiv \exists x \forall y (xy \neq 1)$

Negação de Quantificadores Agrupados

Negue a sentença: Não existe uma mulher que tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo.

Negação de Quantificadores Agrupados

Negue a sentença: Não existe uma mulher que tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo.

Tradução para a lógica: $\neg(\exists x P(x) \wedge \forall y \exists z (R(z, y) \wedge Q(x, z)))$

$P(x)$: x é uma mulher.

$Q(x, z)$: x tomou o avião z.

$R(z, y)$: z é um avião da linha aérea y.

Negação de Quantificadores Agrupados

Negue a sentença: Não existe uma mulher que tenha tomado um avião em todas as linhas aéreas do mundo.

Tradução para a lógica: $\neg(\exists x P(x) \wedge \forall y \exists z (R(z,y) \wedge Q(x,z)))$

$$\neg(\exists x P(x) \wedge \forall y \exists z (Q(x,z) \wedge R(z,y)))$$

$$\equiv \neg(\exists x \forall y \exists z (P(x) \wedge R(z,y) \wedge Q(x,z)))$$

$$\equiv \forall x \neg(\forall y \exists z (P(x) \wedge R(z,y)) \wedge Q(x,z))$$

$$\equiv \forall x \exists y \neg(\exists z (P(x) \wedge R(z,y)) \wedge Q(x,z))$$

$$\equiv \forall x \exists y \forall z \neg(P(x) \wedge R(z,y) \wedge Q(x,z))$$

$$\equiv \forall x \exists y \forall z (\neg P(x) \vee \neg R(z,y) \vee \neg Q(x,z))$$

Referências

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).