



# Matemática Discreta

## Lógica Formal

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

março - 2018

# Lógica Formal

## **O caso do advogado de defesa**

Se meu cliente é culpado, então a faca estava na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta, ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá em 10 de outubro, então Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá em 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos nós sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente.

O argumento do advogado parece correto? Se você fosse um membro do júri, como votaria?

# Lógica Formal

Lógica formal pode ser usada para representar sentenças (ou **proposições**) que usamos em português para comunicar fatos ou informações.

## Proposição

é uma sentença que declara um fato, que obrigatoriamente é verdadeiro ou falso, mas não ambos.

### Exemplos de proposições:

- Brasília é a capital do Brasil.
- Toronto é a Capital do Canadá.
- $1 + 1 = 2$ .
- $2 + 2 = 3$ .

# Proposição

## Proposição

É uma sentença que declara um fato, que obrigatoriamente é verdadeiro ou falso, mas não ambos.

### **Não são proposições:**

- Que horas são?
- Leia isso cuidadosamente.
- $x + 1 = 2$ .
- $x + y = z$ .

# Valor-verdade

## Valor-verdade

Toda proposição tem um valor-verdade:

ou é verdade ou é falsa.

# Proposição

Proposições podem ser representadas por letras, geralmente são A, B, C, etc.

**Exemplo:**

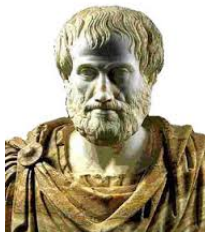
A: Hoje é sexta-feira.

Uma vez que A representa a proposição “Hoje é sexta-feira”, posso dizer que A é verdadeira ou falsa.

# Lógica Proposicional

A lógica baseada em proposições é chamada de Cálculo Proposicional ou Lógica Proposicional.

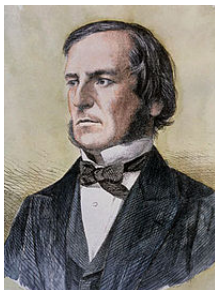
Iniciou-se com Aristóteles há mais de 2300 anos.



# Lógica Proposicional

Em 1854, George Boole formalizou métodos para criar novas proposições a partir de proposições existentes.

Proposições compostas são criadas a partir de proposições existentes utilizando-se operadores lógicos.





# Operadores Lógicos

## Negação

A partir de uma proposição  $A$  pode-se criar uma nova proposição cujo valor verdade seja o contrário de  $A$ .

Tal sentença, chamada de **negação de  $A$** , é denotada por  $\neg A$  ou  $\bar{A}$  ou  $A'$ .

Lê-se “não  $A$ ”.

# Operadores Lógicos

## Negação

**Exemplos:** Qual a negação das seguintes proposições:

- Hoje é sexta-feira.
- No mínimo 10mm de chuva caíram hoje em São Paulo.

# Operadores Lógicos

## Negação

**Exemplos:** Qual a negação das seguintes proposições:

- Hoje é sexta-feira. Hoje não é sexta-feira.
- No mínimo 10mm de chuva caíram hoje em São Paulo.  
Caíram menos que 10 mm de chuva hoje em São Paulo.

# Operadores Lógicos

Tabelas verdade são uma forma metódica de expressar o valor verdade de proposições compostas ou alteradas por operadores lógicos.

Considere uma proposição qualquer  $A$ .

Tabela verdade da negação

$A$	$A'$
V	F
F	V

# Operadores Lógicos

## Conectivos Lógicos

São operadores lógicos que criam novas proposições a partir de duas ou mais sentenças existentes.

### Exemplo:

- João foi bem na prova ou precisa estudar mais.

# Operadores Lógicos

## Conectivos Lógicos

São operadores lógicos que criam novas proposições a partir de duas ou mais sentenças existentes.

### Exemplo:

- João foi bem na prova ou precisa estudar mais.
- Hoje choveu e fez calor.

# Operadores Lógicos

## Conjunção

É a proposição composta  $A \wedge B$ . Lê-se “A e B”.

Seu valor-verdade é verdadeiro somente quando  $A$  é verdadeira e  $B$  é verdadeira.

**Exemplo:** qual a conjunção de “Hoje é sexta-feira.” e “Hoje está chovendo.”?

# Operadores Lógicos

## Conjunção

É a proposição composta  $A \wedge B$ . Lê-se “A e B”.

Seu valor-verdade é verdadeiro somente quando  $A$  é verdadeira e  $B$  é verdadeira.

**Exemplo:** qual a conjunção de “Hoje é sexta-feira.” e “Hoje está chovendo.”?

Hoje é sexta-feira e está chovendo.



# Operadores Lógicos

## Tabela-verdade da conjunção

$A$	$B$	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

# Operadores Lógicos

**Atenção:** “mas” também é uma conjunção.

**Exemplo:** O sol está brilhando, mas está chovendo.

*A*: o sol está brilhando.

*B*: está chovendo.

**Pergunta:** Se só *A* ou só *B* for verdade, a frase do exemplo será verdade?

# Operadores Lógicos

**Não!** “O sol está brilhando, mas está chovendo.” é uma conjunção.

Tabela-verdade da conjunção

$A$	$B$	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

# Operadores Lógicos

## Disjunção

É a proposição composta  $A \vee B$ . Lê-se “A ou B”.

Seu valor-verdade é verdadeiro quando pelo menos uma das sentenças é verdadeira.

**Exemplo:** Estudantes que têm aula de cálculo ou ciência da computação podem assistir essas aulas.

# Operadores Lógicos

**Exemplo:** Qual a disjunção das proposições “Hoje é quarta-feira” e “Amanhã é sábado”?

# Operadores Lógicos

**Exemplo:** Qual a disjunção das proposições “Hoje é quarta-feira” e “Amanhã é sábado”?

Hoje é quarta-feira ou amanhã é sabado.

# Operadores Lógicos

## Tabela-verdade da disjunção

$A$	$B$	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

# Operadores Lógicos

## Disjunção Exclusiva

É a proposição composta  $A \oplus B$ . Lê-se “A ou exclusivo B”.

$A \oplus B$  é verdade se exatamente uma das proposições é verdadeira.

**Exemplo:** Estudantes que têm aula de cálculo ou ciência da computação, mas não ambas, podem assistir essas aulas.



# Operadores Lógicos

Tabela-verdade da disjunção exclusiva

$A$	$B$	$A \oplus B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

# Operadores Lógicos

## Proposição condicional

A proposição condicional  $A \rightarrow B$  é uma proposição composta que indica que, sempre que  $A$  for verdade,  $B$  será verdade.

Lê-se “se  $A$ , então  $B$ ”.

## Terminologia:

A proposição  $A$  é a hipótese, antecedente ou premissa.

A proposição  $B$  é a conclusão ou consequência.

A proposição condicional também é chamada de implicação.

# Operadores Lógicos

## Exemplos:

Se eu for eleito, vou diminuir os impostos.

Se você tirar nota 10 na  $P_1$ , então terá média final 10.

# Operadores Lógicos

## Tabela verdade da implicação

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

# Operadores Lógicos

Outras formas de ler a implicação  $A \rightarrow B$  na língua natural:

- $A$  somente se  $B$ . (Lembre-se que quando  $B$  é falsa,  $A$  deve ser falsa para a sentença ser verdadeira.)
- se  $A$ ,  $B$ .
- $A$  é suficiente para  $B$ .
- $B$  se  $A$ .
- $B$  quando ocorrer  $A$ .
- uma condição necessária para  $A$  é  $B$ .
- $B$  a menos que  $A'$ .
- $A$  implica  $B$ .
- $A$  apenas se  $B$ .
- uma condição suficiente para  $B$  é  $A$ .
- $B$  sempre que  $A$ .
- $B$  é necessário para  $A$ .

# Operadores Lógicos

Quando uma condicional envolve informações de tempo como hoje, amanhã, ontem, agora, etc. ou informações de lugar, como aqui, lá, nesta cidade, etc., o leitor deve considerar o momento presente e local em que está.

Qual o valor verdade de:

- 1 Se aqui é uma sala de aula, então  $1 + 1 = 3$ .
- 2 Se  $1 + 1 = 3$ , então amanhã é terça-feira.

# Operadores Lógicos

Quando uma condicional envolve informações de tempo como hoje, amanhã, ontem, agora, etc. ou informações de lugar, como aqui, lá, nesta cidade, etc., o leitor deve considerar o momento presente e local em que está.

Qual o valor verdade de:

- 1 Se aqui é uma sala de aula, então  $1 + 1 = 3$ .  
Se você estiver em uma sala de aula quando ler, então é falsa, senão é verdadeira.
- 2 Se  $1 + 1 = 3$ , então amanhã é terça-feira.  
É verdadeira, não importa se amanhã é terça-feira ou não.

# Operadores Lógicos

## Bicondicional

Bicondicional ou biimplicação é a proposição composta  $A \leftrightarrow B$ , em que o valor-verdade é verdadeiro somente nos casos em que  $A$  e  $B$  têm o mesmo valor-verdade.

Lê-se  $A$  se, e somente se,  $B$ .

### Exemplos de proposições:

- O quintal fica molhado se, e somente se, chove.
- Brasília é a capital do Brasil se, e somente se, é um Distrito Federal.
- Seja  $z = x + y$ .
  - $z$  é par se, e somente se,  $x$  e  $y$  são pares.
  - $z$  é ímpar se, e somente se,  $x$  e  $y$  têm paridades distintas.



# Operadores Lógicos

Tabela verdade do operador bicondicional

$A$	$B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

# Operadores Lógicos

## Precedência de Operadores Lógicos

Operador	Prioridade
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

(quanto menor o número, mais alta a prioridade)

## Fórmulas bem-formadas

Nós podemos usar parênteses e conectivos lógicos para criar proposições compostas:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Mas é preciso obedecer algumas regras de sintaxe para formar novas proposições. Por exemplo:

$$A)) \wedge \wedge \rightarrow BC$$

não é uma proposição. Dizemos que não é uma **fórmula bem formada**.

# Fórmulas bem-formadas

Deve-se determinar primeiro os valores-verdades das expressões dentro de parênteses:

Exemplo:  $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$

Tabela verdade

$A$	$B$	$B'$	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

# Tabela verdade

Exemplo:  $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$

Tabela verdade

$A$	$B$	$B'$	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

Quantas linhas terá a tabela verdade de uma proposição com  $n$  variáveis?

# Tabela verdade

Exemplo:  $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$

Tabela verdade

$A$	$B$	$B'$	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

Quantas linhas terá a tabela verdade de uma proposição com  $n$  variáveis?  $2^n$

# Tautologia

## Tautologia

Uma **tautologia** é uma sentença lógica cujo valor-verdade é sempre verdade, independente dos valores-verdade das sentenças que a compõe.

Exemplo:  $A \vee B' \rightarrow (A' \wedge B)'$  é uma tautologia.

## Tabela verdade

$A$	$B$	$B'$	$A \vee B'$	$A'$	$A' \wedge B$	$(A' \wedge B)'$	$A \vee B' \rightarrow (A' \wedge B)'$
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V

# Tautologia

## Tautologia

Uma **tautologia** é uma sentença lógica cujo valor-verdade é sempre verdade, independente dos valores-verdade das sentenças que a compõe.

Exemplo:  $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$  não é uma tautologia.

## Tabela verdade

$A$	$B$	$B'$	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V



# Referências

Judith GERSTING. **Mathematical Structures for Computer Science**. W.H. Freeman and Company, 5th edition (July, 2002).

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).