Análise de Algoritmos

Projeto de Algoritmos por Indução

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

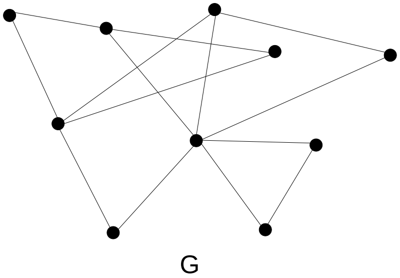
abril - 2016

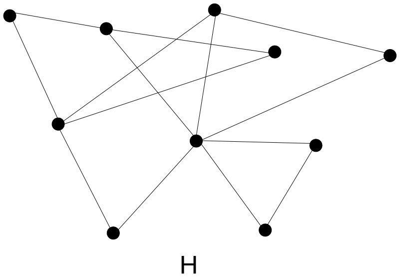
Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Um subgrafo H de um grafo G é um grafo constituído por:

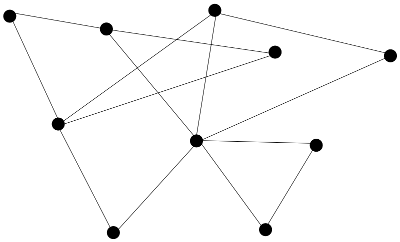
- um subconjunto dos vértices de G, $V(H) \subseteq V(G)$,
- o conjunto de todas as arestas de G que conectam vértices do conjunto $V(H)$.

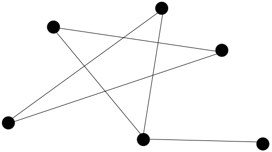
Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$



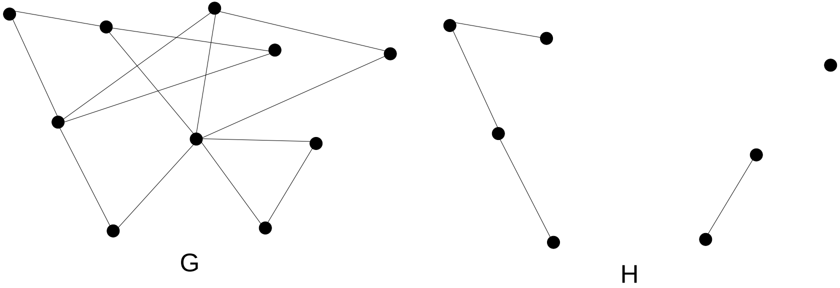


Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$


G


H

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

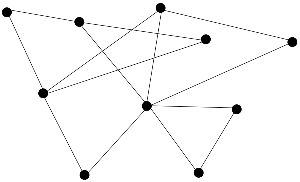


Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

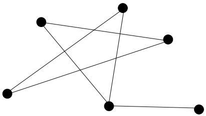
O grau de um vértice é o número de arestas incidentes no mesmo.

O menor grau de um grafo G é denotado por $\delta(G)$.

No exemplo, $\delta(G) = 2$ e $\delta(H) = 1$.



G



H

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Suponha que você está organizando uma conferência.

Você tem um lista de pessoas que quer convidar.

Você acredita que as pessoas aceitarão o convite se houver muitas outras pessoas com quem possam trocar ideias.

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Para cada cientista, você colocou abaixo do nome dele outros cientistas convidados com quem ele possivelmente gostaria de interagir.

Você quer convidar o maior número possível de cientistas da sua lista.

Mas também quer garantir que cada convidado terá pelo menos k colegas na conferência com quem ele gostaria de trocar ideias.

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Modelando o problema como um grafo:

Problema

Dado um grafo não-orientado G e um inteiro k, encontrar um subgrafo induzido maximal tal que $\delta(H) \geq k$ ou concluir que tal subgrafo não existe.

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Sabemos resolver o problema para um grafo com número de vértices no máximo k?

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Sabemos resolver o problema para um grafo com número de vértices no máximo k?

Sim! não existe subrafo H com $\delta(H) = k$.

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Se o grafo tiver $k + 1$ vértices, sabemos resolver?

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Se o grafo tiver $k + 1$ vértices, sabemos resolver?

H só existe se G é um grafo completo, ou seja, todos os seus vértices tem grau k.

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Suponha que sabemos resolver o problema para um grafo que tenha até n vértices.

Podemos usar essa solução para um grafo que tenha $n+1$ vértices?

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Suponha que sabemos resolver o problema para um grafo que tenha até n vértices.

Podemos usar essa solução para um grafo que tenha $n+1$ vértices?

Podemos remover um dos vértices desse grafo, resolver e depois ver como o vértice removido impacta na solução.

Pergunta: Qual vértice remover?

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Se estamos procurando um subgrafo em que todos os vértices tem grau pelo menos k, então vértices com grau menor que k não podem estar em H.

Remova um vértice com grau menor que k.

E se todos os vértices tem grau maior que k?

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Se estamos procurando um subgrafo em que todos os vértices tem grau pelo menos k, então vértices com grau menor que k não podem estar em H.

Remova um vértice com grau menor que k.

E se todos os vértices tem grau maior que k? Então $G \simeq H$.

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

Se existe vértice com grau menor que k, remova um desses vértices.

A remoção de um vértice e suas arestas pode diminuir o grau de outros vértices.

Se um vértice ficar com grau menor que k, ele terá que ser removido. (As próximas iterações cuidam disso.)

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

O grafo resultante tem tamanho máximo?

Encontrar H: um subgrafo induzido maximal com $\delta(H) = k$

A remoção dos vértices com grau menor que k é obrigatória para a construção de H.

Quando a eliminação obrigatória de um vértice v causa a redução do grau de um outro vértice w, fazendo com que w tenha que ser eliminado, vê-se que não há escolha, a eliminação de w é obrigatória, vai acontecer em qualquer subgrafo H escolhido.

Como apenas vértices cuja eliminação é obrigatória são retirados, o grafo resultante é máximo.

Problema da Celebridade

Em um conjunto com *n* pessoas, uma *celebridade* é uma pessoa conhecida por todos e que não conhece ninguém.

Problema

Identificar a celebridade, se existir, em um conjunto de *n* pessoas, fazendo somente perguntas no formato:

"Desculpe-me, você conhece aquela pessoa ali?"

Assumindo que todas as respostas são verdadeiras e que mesmo a celebridade vai responder.

Problema da Celebridade

O objetivo é minimizar o número de perguntas.

Como existem n pessoas, no pior caso teremos que fazer a pergunta $\frac{n(n-1)}{2}$ vezes.

Problema da Celebridade

Formulando o problema como um grafo:

Considere um grafo orientado onde:

- as pessoas são vértices,
- se a pessoa A conhece B, então existe uma aresta orientada de A para B.

A celebridade é uma sumidouro (um vértice onde chegam arestas e de onde não saem arestas).

Observação: Note que se existir celebridade, ela é a única do conjunto.

Problema da Celebridade

Então a entrada do problema pode ser uma matriz de adjacências $n \times n$, onde a célula $M[i][j] = 1$ se a pessoa i conhece a pessoa j; caso contrário, $M[i][j] = 0$.

Problema

Dada uma matriz de adjacências, determinar se existe um i tal que todas as células da coluna i são iguais a 1 e todas as células da linha i são iguais a 0, exceto $M[i][i]$.

Problema da Celebridade

Base: Considere um conjunto com duas pessoas.

Sabemos verificar se uma delas é uma celebridade?

Problema da Celebridade

Base: Considere um conjunto com duas pessoas.

Sabemos verificar se uma delas é uma celebridade?

Se $M[A][B] = 0$ e $M[B][A] = 1$, A é celebridade.

Se $M[B][A] = 0$ e $M[A][B] = 1$, B é celebridade.

Nos demais casos, não há celebridade.

Problema da Celebridade

Considere, por indução, que sabemos resolver para n pessoas.

Pergunta: sabemos resolver em um conjunto com $n+1$ pessoas?

Problema da Celebridade

Considere, por indução, que sabemos resolver para n pessoas.

Pergunta: sabemos resolver em um conjunto com $n + 1$ pessoas?

Separe uma pessoa do conjunto.

Problema da Celebridade

Há três casos:

1. A celebridade é uma das pessoas do conjunto com n pessoas.
2. A celebridade é a pessoa que foi separada.
3. Não há celebridade.

Problema da Celebridade

Caso 1: A celebridade é uma das pessoas do conjunto com n pessoas.

Então basta verificar:

a se a pessoa separada também conhece a celebridade e

b se a celebridade não conhece a pessoa separada do conjunto.

Se as duas respostas são sim, então a celebridade do conjunto de n pessoas é uma celebridade no conjunto de $n + 1$ pessoas.

Problema da Celebridade

Caso 2: A celebridade é a pessoa que foi separada.

Para determinar que essa pessoa não conhece ninguém e que todos a conhecem, são necessárias $2(n-1)$ perguntas.

Se usarmos essa quantidade de perguntas em cada passo da indução, vamos ter uma número de perguntas $O(n^2)$.

Problema da Celebridade

É difícil identificar uma celebridade.

É mais fácil identificar quem não é celebridade.

Então podemos identificar quem não é celebridade e remover essa pessoa do conjunto de $n + 1$ pessoas!

Problema da Celebridade

Considere duas pessoas quaisquer do conjunto de $n+1$ pessoas: Alice e Bob.

Ao perguntarmos para Alice se ela conhece Bob, há duas possibilidades:

- Se sim: então Alice não é celebridade. Removemos Alice do conjunto.
- Se não: então Bob não é celebridade: removemos Bob do conjunto.

Problema da Celebridade

Há três casos:

1. A celebridade é uma das pessoas do conjunto com n pessoas.
2. A celebridade é a pessoa que foi separada.
3. Não há celebridade.

Se eliminarmos a pessoa certa, o caso 2 não ocorre.

Problema da Celebridade

Caso 3: Se não há celebridade.
Se não há celebridade no conjunto com n pessoas, então não há celebridade, pois a pessoa separada dos demais não é celebridade.

Problema da Celebridade

Voltando ao **caso 1:** A celebridade é uma das pessoas do conjunto com n pessoas.

Então basta verificar:

a) se a pessoa separada também conhece a celebridade e

b) se a celebridade não conhece a pessoa separada do conjunto.

Se as duas respostas são sim, então a celebridade do conjunto de n pessoas é uma celebridade no conjunto de $n+1$ pessoas.

Problema da Celebridade

Implementação da solução:

Primeira fase: eliminar todos os candidatos exceto 1.

Segunda fase: verificar se esse candidato é de fato uma celebridade.

Considere que os candidatos estão em uma pilha, pegue dois deles.

Verifique com uma pergunta qual dos dois não pode ser celebridade e remova-o.

Pegue outro candidato da pilha para comparar com o que sobrou e repita o processo.

Problema da Celebridade

Implementação da solução:

Quando restar apenas um candidato, basta verificar se ele é mesmo uma celebridade: faça $2(n-1)$ perguntas para saber se todos o conhecem e se ele conhece todos.

Total de perguntas: $3(n-1)$.

Referências

U. MAMBER, **Introduction to Algorithms: a Creative Approach**, Addison Wesley, 1st ed., 1989.