Somatórios

Definição

Somatório (ou Somatória) é uma forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de parcelas que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente.

Exemplo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k$$

É a soma de parcelas que são todas potências de 2 consecutivas, a partir de 2^0.

Somatórios

Definição

Somatório (ou Somatória) é uma forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de parcelas que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente.

Outro exemplo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n + 1$$

É a soma de parcelas que são números ímpares consecutivos, a partir do número 1.

Somatórios - Notação Sigma

O Somatório é também chamado de **Notação Sigma** e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

ou

$$\textstyle\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

Deve-se incluir na soma todos os valores de $f(k)$, desde que $k \geq m$ e $k \leq n$.

Quando $m > n$, $\sum_{k=m}^{n} f(k) = 0$.

Somatórios - Notação Sigma

Exemplo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{100} = \sum_{k=0}^{100} 2^k$$

Outro exemplo:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^{n} 2i + 1$$

A variável k do primeiro exemplo e a variável i do segundo exemplo são chamadas de **variáveis indexadoras**.

Somatórios - Notação Sigma

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 7, 8\}$

$$\sum_{k \in A} k(9-k) = 1 \times 8 + 2 \times 7 + 7 \times 2 + 8 \times 1 = 44$$

Somatórios Básicos

Podemos provar que:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Também podemos deduzir:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 \ldots + 1 = n \times 1 = n$$

Manipulação de Somatórios

Podemos substituir o intervalo definido para a variável indexadora, desde que façamos ajustes no somatório:

Substituindo k por $i = k + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1}$$

Manipulação de Somatórios

Pode-se colocar constantes em evidência:

$$\sum_{k=1}^{n} c(k+5) = c(1+5) + c(2+5) + c(3+5) + \ldots + c(n+5) =$$

$$= c[(1+5) + (2+5) + (3+5) + \ldots + (n+5)] = c\sum_{k=1}^{n}(k+5)$$

De forma geral,

$$\sum_{k=m}^{n} cf(k) = c\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

Manipulação de Somatórios

Um somatório de somas pode ser substituído por uma soma de somatórios:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) + g(k) = f(1) + g(1) + f(2) + g(2) + \ldots + f(n) + g(n) =$$

$$= f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+g(1)+g(2)+\ldots+g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)+\sum_{k=1}^{n} g(k)$$

De forma geral,

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) + g(i) = \sum_{i=m}^{n} f(i) + \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

Manipulação de Somatórios

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} - x_1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} - x_1$$

$$= x_{n+1} - x_1$$

Manipulação de Somatórios

Definição

Um **somatório telescópico** é um somatório em que o segundo termo de uma parcela cancela o primeiro termo da próxima (ou vice-versa).

Um exemplo é o somatório visto no último exemplo.

Manipulação de Somatórios

Vamos usar a propriedade dos somatórios telescópicos para calcular $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Observe que $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

Então, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$$

Manipulação de Somatórios

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$$

Observe que o lado esquerdo é um somatório telescópico:

$$2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots + n^3 - (n-1)^3 + (n+1)^3 - n^3$$

$$= -1^3 + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

Manipulação de Somatórios

Então,

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$$

pode ser reescrito:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Portanto,

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n$$

Manipulação de Somatórios

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= (n+1)(n^2+2n+1) - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{2(n^2+2n+1)(n+1)}{2} - \frac{2\cdot 1}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{2n}{2}$$

$$= \frac{(2n^2+4n+2-3n)(n+1)}{2} - \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(2n^2+n+2-2)(n+1)}{2} = \frac{(2n^2+n)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(2n+1)(n+1)}{2}$$

Manipulação de Somatórios

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{2}$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Somatórios Múltiplos

Os termos de um somatório podem estar em função de mais de uma variável indexadora:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i,j)$$

$$= f(1,5) + f(1,6) + f(1,7) + f(1,8)$$

$$+f(2,5) + f(2,6) + f(2,7) + f(2,8)$$

$$+f(3,5) + f(3,6) + f(3,7) + f(3,8)$$

Somatórios Múltiplos

Pode-se escrever:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i,j) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=5}^{8} f(i,j)$$

Somatórios Múltiplos

Observe:

$$= f(1,5) + f(1,6) + f(1,7) + f(1,8)$$

$$+ f(2,5) + f(2,6) + f(2,7) + f(2,8)$$

$$+ f(3,5) + f(3,6) + f(3,7) + f(3,8)$$

$$= f(1,5) + f(2,5) + f(3,5) + f(1,6) + f(2,6) + f(3,6)$$

$$+ f(1,7) + f(2,7) + f(3,7) + f(1,8) + f(2,8) + f(3,8)$$

Somatórios Múltiplos

Portanto,

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 5 \leq j \leq 8}} f(i,j) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=5}^{8} f(i,j) = \sum_{j=5}^{8} \sum_{i=1}^{3} f(i,j)$$

Mudança de Ordem dos Somatórios

Há casos em que uma das variáveis indexadoras depende da outra:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$$

$$\begin{aligned} &= a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + \ldots + a_{1,n} \\ &\quad + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + \ldots + a_{2,n} \\ &\quad + a_{3,3} + a_{3,4} + \ldots + a_{3,n} + \ldots \\ &\quad + a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n} \\ &\quad + a_{n,n} \end{aligned}$$

Mudança de Ordem dos Somatórios

Nesses casos, pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

$$\begin{aligned}
= a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + \ldots + a_{1,n} \\
+ a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + \ldots + a_{2,n} \\
+ a_{3,3} + a_{3,4} + \ldots + a_{3,n} + \ldots \\
+ a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n} \\
+ a_{n,n}
\end{aligned}$$

Distributividade dos Somatórios

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} g(j)\right)$$

$$= (f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)]\,[g(1) + g(2) + \ldots + g(m))$$

$$= f(1)g(1) + f(1)g(2) + \ldots + f(1)g(m)$$

$$+f(2)g(1) + f(2)g(2) + \ldots + f(2)g(m)$$

$$+f(3)g(1) + f(3)g(2) + \ldots + f(3)g(m) + \ldots$$

$$+f(n)g(1) + f(n)g(2) + \ldots + f(n)g(m)$$

Distributividade dos Somatórios

Observe que

$$f(1)g(1) + f(1)g(2) + \ldots + f(1)g(m)$$

$$+f(2)g(1) + f(2)g(2) + \ldots + f(2)g(m)$$

$$+f(3)g(1) + f(3)g(2) + \ldots + f(3)g(m) + \ldots$$

$$+f(n)g(1) + f(n)g(2) + \ldots + f(n)g(m)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} f(i)g(j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(i)g(j)$$

Somas de Séries Geométricas

Por que $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$?

Quando temos um número binário $a_k a_{k-1} a_{k-2} a_{k-3} \ldots a_0$ e queremos convertê-lo para a base decimal, fazemos:

$$a_k(2^k) + a_{k-1}(2^{k-1}) + a_{k-2}(2^{k-2}) + a_{k-3}(2^{k-3}) + \ldots + a_0(2^0)$$

Quando $a_i = 1$, para todo $i \in [0, k]$, temos:

$$2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2^0$$

Somas de Séries Geométricas

Parece difícil calcular $2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2^0$.

E quando somamos mais 1 na base binária?

$11111111\ldots1 + 1 = 100000000\ldots0$
primeiro termo da soma: $k+1$ dígitos
resultado da soma: $k+2$ dígitos.

Na conversão para a base decimal:

$100000000\ldots0 = 2^{k+1}$.

Então, $(\sum_{i=0}^{k} 2^i) + 1 = 2^{k+1}$.

Então, $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$.

Somas de Séries Geométricas

Usando esta idéia, você consegue mostrar que $\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$?

Somas de Série Harmônica

$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i} = \ln k + c$, onde c é uma constante.

Leia a Seção A.2 (Apêndice A) do livro de Thomas H. CORMEN et al. *Introduction to Algorithms*, 2 ed., 2001.

Referências

Anamaria GOMIDE e Jorge STOLFI. **Elementos da Matemática Discreta para Computação**. disponível em Elementos da Matemática Discreta para Computação.

U. MAMBER, **Introduction to Algorithms: a Creative Approach**, Addison Wesley, 1st ed., 1989.

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).

Thomas H. CORMEN, Charles E. LEISERSON, Ronald L. RIVEST, Clifford STEIN. *Introduction to Algorithms*, 2 ed., 2001.