Matemática Discreta

Cálculo de Predicados

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

março - 2017

Quantificadores

Como expressar a proposição "Para todo número inteiro x, o valor de x é positivo." usando lógica proposicional?

Esta proposição contém duas características distintas das anteriores:

- quantificadores,
- e predicados.

Quantificadores

Quantificadores

Quantificadores são expressões como "para todo", "para cada", "para algum", "existe um", que dizem de alguma forma quantos objetos têm uma certa propriedade.

Quantificador Universal

$\forall x$

Lê-se: para todo x, para cada x, todo x.

$\forall x(x > 0)$ representa a senteça:

"Para todo número inteiro x, o valor de x é positivo."

Predicado

$\forall x(x > 0)$: um par de parênteses contém o **predicado**.

Predicado

O predicado é uma propriedade ou atributo da variável.

Predicados podem ser representados por funções das variáveis a que se referem: $P(x)$ refere-se a alguma propriedade de x.

Exemplo: $P(x)$: x é azul.

Predicado

Exemplo: Considere o predicado: $P(x) : x > 3$.

Qual o valor-verdade das proposições:

- $P(2)$
- $P(3)$
- $P(4)$

Predicado

Exemplo: Considere o predicado: $P(x) : x > 3$.

Qual o valor-verdade das proposições:

- $P(2)$ falso
- $P(3)$ falso
- $P(4)$ verdadeiro

Predicado

Considere o predicado: $R(x, y, z) : x + y = z$.

Qual o valor-verdade das proposições:

- $R(1, 2, 3)$
- $R(0, 0, 1)$

Predicado

Considere o predicado: $R(x, y, z) : x + y = z$.

Qual o valor-verdade das proposições:

- $R(1, 2, 3)$ verdadeiro
- $R(0, 0, 1)$ falso

Predicado

Exemplo de predicado: $A(x)$: o computador x está sendo invadido por um hacker.

Suponha que somente CS2 e MATH-1 estão sendo invadidos por hackers. Qual o valor-verdade das proposições:

- $A(\text{CS1})$
- $A(\text{CS2})$
- $A(\text{DeMorgan})$
- $A(\text{MATH-1})$

Predicado

Exemplo de predicado: $A(x)$: o computador x está sendo invadido por um hacker.

Suponha que somente CS2 e MATH-1 estão sendo invadidos por hackers. Qual o valor-verdade das proposições:

- $A(\text{CS1})$ falso
- $A(\text{CS2})$ verdadeiro
- $A(\text{DeMorgan})$ falso
- $A(\text{MATH-1})$ verdadeiro

Domínio

$\forall x(x > 0)$

O valor-verdade da expressão depende do domínio da variável.

Se o domínio são os números inteiros positivos, então a expressão acima é verdadeira.

Se o domínio são todos os números inteiros, então a expressão acima é falsa. (Contraexemplo: $x = 0$, $x = -10$, entre outros.)

Domínio

$\forall x P(x)$

O valor-verdade da expressão depende do domínio da variável.

Se o domínio são todos os livros da biblioteca da UTFPR - Ponta Grossa e o predicado, $P(x)$, diz que x tem capa vermelha, então a expressão é falsa.

Prática: Domínio e Quantificador Universal

Dê o valor-verdade da expressão $\forall x P(x)$ em cada uma das interpretações:

- $P(x)$ é a propriedade de que x é amarelo e o domínio é o conjunto de todas as flores.
- $P(x)$ é a propriedade de que x é uma planta e o domínio é o conjunto de todas as flores naturais.
- $P(x)$ é a propriedade de que x é positivo ou negativo e o domínio é o conjunto dos números inteiros.

Prática: Domínio e Quantificador Universal

Dê o valor-verdade da expressão $\forall x P(x)$ em cada uma das interpretações:

- $P(x)$ é a propriedade de que x é amarelo e o domínio é o conjunto de todas as flores. falso
- $P(x)$ é a propriedade de que x é uma planta e o domínio é o conjunto de todas as flores naturais. verdadeiro
- $P(x)$ é a propriedade de que x é positivo ou negativo e o domínio é o conjunto dos números inteiros. falso

Prática: Domínio e Quantificador Universal

Dê o valor-verdade:

- da expressão $\forall x P(x)$ em que $P(x) : x^2 > 0$ e o domínio são os reais.
- da expressão $\forall x P(x)$ em que $P(x) : x^2 < 10$ e o domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$.
- da expressão $\forall x P(x)$ em que $P(x) : x^2 \geq x$ e o domínio são os números reais.
- da expressão $\forall x P(x)$ em que $P(x) : x^2 \geq x$ e o domínio são os números inteiros.

Quantificador Existencial

$\exists x$

Lê-se: para algum x, existe um x, pelo menos um x.

$\exists x(x > 0)$ representa a senteça:

"Algum número x é positivo."

Quantificador Existencial

$\exists x(x > 0)$

Da mesma forma, o valor-verdade da expressão depende do domínio da variável.

Se o domínio contém um número positivo, então a expressão é verdadeira.

Caso contrário, é falsa.

Quantificador Existencial

$\exists x P(x)$

O valor-verdade da expressão depende do domínio da variável.

Se o domínio são todos os livros da biblioteca da UTFPR - Ponta Grossa e o predicado diz x tem capa vermelha, então a expressão é verdadeira.

(Deve existir algum livro com capa vermelha na biblioteca!)

Quantificador Existencial

Dê o valor-verdade:

- da expressão $\exists x P(x)$ em que $P(x) : x > 3$ e o domínio são os reais.
- da expressão $\exists x P(x)$ em que $P(x) : x = x + 1$ e o domínio são os números reais.
- da expressão $\exists x P(x)$ em que $P(x) : x^2 \geq 10$ e o domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$.

Quantificadores

Quando uma expressão $\forall x P(x)$ é falsa?

Quando uma expressão $\exists x P(x)$ é falsa?

Quantificadores

Quando uma expressão $\forall x P(x)$ é falsa?

Quando existe um x que não satisfaz $P(x)$

Quando uma expressão $\exists x P(x)$ é falsa?

Quando todo x não satisfaz $P(x)$

Quantificador de Unicidade

Quantiicador de Unicidade

O quantificador de unicidade indica que **existe exatamente um** elemento que satisfaz o predicado.

Denota-se: $\exists! x P(x)$ ou $\exists_1 x P(x)$.

Quantificador de Unicidade

Exemplo: $\exists! x(2x = 0)$, no domínio dos números reais é verdadeira e $x = 0$.

Exemplo: $\exists_1 x(x^2 < 0)$, no domínio dos números reais é falsa.

Exemplo: $\exists! x(x > 1000)$, no domínio dos números naturais é falsa.

Quantificador de Domínio Restrito

Pode-se incluir imediatamente após o quantificador uma notação abreviada que limita o domínio.

Exemplos:

- $\forall x < 0(x^2 > 0)$
- $\forall y \neq 0(y^3 \neq 0)$
- $\exists z > 0(z^2 = 2)$

Quantificador de Domínio Restrito

O quantificador universal de domínio restrito pode ser substituído por um conectivo condicional:

Exemplos:

- $\forall x < 0(x^2 > 0) \equiv \forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$
- $\forall y \neq 0(y^3 \neq 0) \equiv \forall y(y \neq 0 \rightarrow y^3 \neq 0)$

Quantificador de Domínio Restrito

O quantificador existencial de domínio restrito pode ser substituído por uma conjunção:

Exemplo:

- $\exists z > 0(z^2 = 2) \equiv \exists z(z > 0 \land z^2 = 2)$

Prioridade dos Quantificadores

Os quantificadores tem prioridade sobre qualquer conectivo da lógica proposicional:

$$\exists z \;\; z > 0 \wedge z^2 = 2 \not\equiv \exists z(z > 0 \wedge z^2 = 2)$$

$$\forall x P(x) \vee Q(x) \equiv \forall x(P(x)) \vee Q(x)$$

Equivalências Lógicas Quantificadas

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

Quantificadores - Interpretação

Constantes podem fazer parte do predicado.

Exemplo: o valor-verdade da expressão $\forall x Q(x, 5)$ quando $Q(x, y)$ é a propriedade de que $x < y$ e o domínio de x é o conjunto de todos os inteiros é ...

Exemplo: o valor-verdade da expressão $\exists y Q(5, y)$ quando $Q(x, y)$ é a propriedade de que $x < y$ e o domínio de y é o conjunto de todos os inteiros é ...

Quantificadores - Interpretação

Constantes podem fazer parte do predicado.

Exemplo: o valor-verdade da expressão $\forall x Q(x, 5)$ quando $Q(x, y)$ é a propriedade de que $x < y$ e o domínio de x é o conjunto de todos os inteiros é falso.

Exemplo: o valor-verdade da expressão $\exists y Q(5, y)$ quando $Q(x, y)$ é a propriedade de que $x < y$ e o domínio de y é o conjunto de todos os inteiros é verdade.

Predicados bem formados

Expressões devem obedecer regras de sintaxe para serem predicados bem formados:

$P(x)\forall x \wedge \exists y$ não é um predicado bem formado.

- $P(x) \vee Q(y)$ (não é predicado, não tem quantificadores).
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ é predicado bem formado e o escopo de $\forall x$ é $P(x) \rightarrow Q(x)$.

Predicados bem formados

- $(\exists x)S(x) \vee (\forall y)T(y)$ é predicado bem formado.

Variáveis livres

Se uma variável aparece em alguma fórmula bem formada e não faz parte de nenhum quantificador, então é uma **variável livre**.

Exemplo: y é uma variável livre em $(\forall x)[Q(x, y) \rightarrow (\exists y)R(x, y)]$,

porque y ocorre pela primeira vez sem estar acompanhado de um quantificador.

Nem sempre expressões que contêm variáveis livres têm valor-verdade definido. (Lembre que sem valor-verdade definido não é proposição!)

Variáveis livres

Exemplo: Considere o domínio de todos os números inteiros.

$P(x) : x > 0$

Qual o valor verdade de $P(y) \wedge P(5)$?

Qual o valor verdade de $P(y) \vee P(5)$?

Variáveis livres

Exemplo: Considere o domínio de todos os números inteiros.

$P(x) : x > 0$

Qual o valor verdade de $P(y) \wedge P(5)$? indefinido

Qual o valor verdade de $P(y) \vee P(5)$? verdade

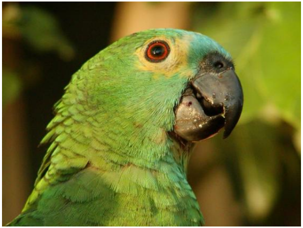
Nos dois casos, y é uma variável livre, não está associada a um quantificador.

Tradução

Muitas frases podem ser escritas por predicados lógicos.

Considere a frase: "Todo papagaio é feio."

É o mesmo que dizer: "Para qualquer coisa, se essa coisa é um papagaio, então é feio."

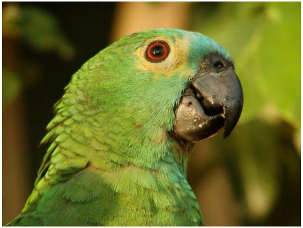


Tradução

Muitas frases podem ser escritas por predicados lógicos.

Considere a frase: "Todo papagaio é feio."

É o mesmo que dizer: "Para qualquer coisa, se essa coisa é um papagaio, então é feia."



Sejam $P(x)$: x é um papagaio e $F(x)$: x é feio.

Simbolicamente: $\forall x(P(x) \rightarrow F(x))$.

Tradução

Dica: *"o quantificador universal e o conectivo de implicação quase sempre estão juntos."*

Poderíamos substituir, neste contexto, $\forall x(P(x) \rightarrow F(x))$ por $\forall x(P(x) \wedge F(x))$?

Tradução

Dica: *"o quantificador universal e o conectivo de implicação quase sempre estão juntos."*

Poderíamos substituir, neste contexto, $\forall x(P(x) \rightarrow F(x))$ por $\forall x(P(x) \wedge F(x))$? **Não! nem tudo no mundo é papagaio feio!**

Tradução

Considere a frase: "Existe um papagaio feio."

É o mesmo que dizer: "Existe uma coisa, que é um papagaio e é feia."

Sejam $P(x) : x$ é um papagaio e $F(x) : x$ é feia.

Simbolicamente: $\exists x(P(x) \wedge F(x))$.

Tradução

Dica: *"o quantificador existencial e o conectivo* $\wedge$ *quase sempre estão juntos."*

Poderíamos substituir, neste contexto, $\exists x(P(x) \wedge F(x))$ por $\exists x(P(x) \rightarrow F(x))$?

Tradução

Poderíamos substituir, neste contexto, $\exists x(P(x) \wedge F(x))$ por $\exists x(P(x) \rightarrow F(x))$?

O que precisa acontecer para que nosso predicado seja verdade?

Basta não existir papagaios.

Mas se não existir, então não existe um papagaio feio. (Que é o que queríamos afirmar!).

A implicação não traduziu exatamente o que queríamos dizer.

Tradução

Prática:
Considere: $S(x)$: x é um estudante, $I(x)$: x é inteligente, e $M(x)$: x gosta de música.

Escreva predicados bem formados para as seguintes proposições (o domínio são todas as pessoas):

1. Todos os estudantes são inteligentes.
2. Alguns estudantes inteligentes gostam de música.
3. Todos que gostam de música são estudantes estúpidos.
4. Só estudantes inteligentes gostam de música.

Referências

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).

Judith L. GERSTING. **Mathematical Structures for Computer Science**. 5th Ed.