Matemática Discreta

Regras de Inferência

Profa. Sheila Morais de Almeida

DAINF-UTFPR-PG

março - 2017

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Considere o argumento: "Se João pensa, então João existe. João pensa. Portanto, João existe."

Traduzindo para lógica:

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Considere o argumento: "Se João pensa, então João existe. João pensa. Portanto, João existe."

Traduzindo para lógica:

p : João pensa. q : João existe.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Considere o argumento: "Se João pensa, então João existe. João pensa. Portanto, João existe."

Esse argumento é válido?

p : João pensa. q : João existe.

$p \rightarrow q$
p
$\therefore q$

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Esse argumento é válido?

p : João pensa. q : João existe.

$p \rightarrow q$
p
$\therefore q$

Para verificar se um argumento é valido, assumimos que suas premissas são verdadeiras e conferimos o valor verdade da conclusão.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Esse argumento é válido?

p : João pensa. q : João existe.

$p \rightarrow q \leftarrow$ é verdade.
$p \leftarrow$ é verdade.
$\therefore q$

Para verificar se um argumento é valido, assumimos que suas premissas são verdadeiras e conferimos o valor verdade da conclusão.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Esse argumento é válido?

p : João pensa. q : João existe.

$p \to q \leftarrow$ é verdade
$p \leftarrow$ é verdade.
$\therefore q$

Como p é verdade e $p \to q$ é verdade, só há um possível valor verdade para q. Qual é?

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Esse argumento é válido?

p : João pensa. q : João existe.

$p \to q$
p
$\therefore q \leftarrow$ é verdade.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ é uma tautologia.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

O que acontece quando uma das premissas é falsa?

p : Pedro é um jogador famoso.

q : Pedro tem muita experiência em futebol.

Premissas:

$p \rightarrow q$

p

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

O que acontece quando uma das premissas é falsa?

p : Pedro é um jogador famoso.

q : Pedro tem muita experiência em futebol.

Premissas:

$p \rightarrow q$

$p \leftarrow$ é falsa

Podemos concluir que...

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

O que acontece quando uma das premissas é falsa?

p : Pedro é um jogador famoso.

q : Pedro tem muita experiência em futebol.

Premissas:

$p \rightarrow q$

$p \leftarrow$ é falsa

Podemos concluir que $p \rightarrow q$ é verdade, mas isso não significa que q é verdade! q pode ser falsa.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

O que acontece quando uma das premissas é falsa?

p : Pedro é um jogador famoso.

q : Pedro tem muita experiência em futebol.

Premissas:

$p \rightarrow q$ $\leftarrow$ é falsa

p

Podemos concluir que p é verdade e q é falsa.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

O que acontece quando uma das premissas é falsa?

p : Pedro é um jogador famoso.

q : Pedro tem muita experiência em futebol.

Premissas:

$p \rightarrow q \leftarrow$ é falsa

p

Podemos concluir que p é verdade e q é falsa. Então não podemos concluir q verdade!

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

O que acontece quando uma das premissas é falsa?

p : Pedro é um jogador famoso.

q : Pedro tem muita experiência em futebol.

Premissas:

$p \to q$

p

$\therefore q$

Se uma das premissas é falsa, esse argumento não é válido.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Definição:

Um **argumento** em lógica proposicional é uma sequência de proposições.

Todas as proposições, exceto a última, são chamadas de **premissas**.

A última proposição é a **conclusão**.

Um **argumento é válido** se a validade das premissas implica na validade da conclusão.

Argumentos válidos

O caso do advogado de defesa
Se meu cliente é culpado, então a faca estava na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta, ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá em 10 de outubro, então Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá em 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos nós sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente.

O argumento do advogado parece correto? Como você votaria?

Argumentos válidos

Para mostrar que um argumento é válido, podemos usar tabela verdade.

Mas...

Argumentos válidos

Para mostrar que um argumento é válido, podemos usar tabela verdade.

Mas, se o argumento tiver 10 variáveis, a tabela verdade terá 1024 linhas!

Argumentos válidos

Para mostrar que um argumento é válido, podemos usar tabela verdade.

Em vez disso, podemos usar algumas formas de argumento simples e conhecidamente válidas, as chamadas **regras de inferência**.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

Essa regra de inferência, é chamada de **modus ponens**.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Considere que as seguintes proposições são verdadeiras.

- Se Marília fizer muitos exercícios, então vai bem na prova de Matemática Discreta.
- Marília fez muitos exercícios.

Por **modus ponens**, Marília vai bem na prova de Matemática Discreta.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Esse argumento é válido?

Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, então $(\sqrt{2})^2 > (\frac{3}{2})^2$.

Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$.

Por modus ponens, $(\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Esse argumento é válido?

Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, então $(\sqrt{2})^2 > (\frac{3}{2})^2$.

Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$.

Por modus ponens, $(\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Usar modus ponens é válido, mas as premissas tem que ser verdadeiras.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Esse argumento é válido?

Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, então $(\sqrt{2})^2 > (\frac{3}{2}^2$.

Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. $\leftarrow$ falsa

Por modus ponens, $(\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Usar modus ponens é válido, mas as premissas tem que ser verdadeiras.

Argumentos Válidos em Lógica Proposicional

Esse argumento é válido?

Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, então $(\sqrt{2})^2 > (\frac{3}{2}^2$.

Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. $\leftarrow$ falsa

Por modus ponens, $(\sqrt{2})^2 = 2 > (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$. $\leftarrow$ falsa

Usar modus ponens é válido, mas as premissas tem que ser verdadeiras.

Algumas regras de inferência

$p \to p \vee q$

Está chovendo agora. Portanto, está chovendo ou esquentando agora.

Nome da regra de inferência: **adição**.

Algumas regras de inferência

$p \wedge q \rightarrow p$

Está chovendo agora e esfriando agora. Portanto, está chovendo agora.

Nome da regra de inferência: **simplificação**.

Algumas regras de inferência

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

Se chover hoje, não terá churrasco. Se não tiver churrasco hoje, terá churrasco amanhã. Então, se chover hoje, terá churrasco amanhã.

Nome da regra de inferência: **silogismo hipotético**.

Algumas regras de inferência

Sabemos que $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.

Então, $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow$

Algumas regras de inferência

Sabemos que $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.

Então, $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \ldots$

É o mesmo que:
$(\neg q \rightarrow \neg p) \wedge \neg q \rightarrow \ldots$

Por modus ponens....

Algumas regras de inferência

Sabemos que $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.

Então, $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \ldots$

É o mesmo que:
$(\neg q \rightarrow \neg p) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

Por modus ponens....

Algumas regras de inferência

Sabemos que $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.

Então, $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

É o mesmo que:
$(\neg q \rightarrow \neg p) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

Por modus ponens....

Algumas regras de inferência

$(p \to q) \land \neg q \to \neg p$

Nome da regra de inferência: **modus tollens**.

Algumas regras de inferência

$(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$

Vou ao cinema ou vou estudar para a prova. Não vou ao cinema. Então vou estudar para a prova.

Nome da regra de inferência: **silogismo disjuntivo**.

Argumentos válidos

O argumento é válido?

Esta tarde está ensolorada e está mais frio que ontem. Vamos nadar se estiver ensolarado. Se não formos nadar, então vamos fazer um passeio de barco. Se fizermos um passeio de barco, estaremos em casa ao anoitecer. Então, estaremos em casa ao anoitecer.

Argumentos válidos

O argumento é válido?

Esta tarde está ensolorada e está mais frio que ontem. Vamos nadar se estiver ensolarado. Se não formos nadar, então vamos fazer um passeio de barco. Se fizermos um passeio de barco, estaremos em casa ao anoitecer. Então, estaremos em casa ao anoitecer.

p: Esta tarde está ensolorada.
q: Está mais frio que ontem.
r: Vamos nadar.
s: Vamos fazer um passeio de barco.
t: Estaremos em casa ao anoitecer.

Argumentos válidos

1. $\neg p \wedge q$ (pelo enunciado)
2. $r \rightarrow p$ (pelo enunciado)
3. $\neg r \rightarrow s$ (pelo enunciado)
4. $s \rightarrow t$ (pelo enunciado)
5. $\neg p \rightarrow \neg r$ (contrapositiva de (2))
6. $\neg p$ (simplificação de (1))
7. $\neg r$ (modus ponens de (5) e (6))
8. s (modus ponens de (3) e (7))
9. t (modus ponens de (4) e (8))

Argumentos válidos

1. $\neg p \wedge q$ (pelo enunciado)
2. $r \to p$ (pelo enunciado) No enunciado é $p \to r$
3. $\neg r \to s$ (pelo enunciado)
4. $s \to t$ (pelo enunciado)
5. $\neg p \to \neg r$ (contrapositiva de (2))
6. $\neg p$ (simplificação de (1))
7. $\neg r$ (modus ponens de (5) e (6))
8. s (modus ponens de (3) e (7))
9. t (modus ponens de (4) e (8))

O argumento se baseia em premissa indefinida, não é válido.

Argumentos válidos

O argumento é válido?

Se você me mandar um e-mail, então eu terminarei o programa. Se você não me mandar um e-mail, então vou dormir cedo. Se eu dormir cedo, acordarei me sentindo bem. Se eu não terminar o programa, acordarei me sentindo bem.

p: Você me manda um e-mail.
q: Eu termino o programa.
r: Vou dormir cedo.
s: Arcordarei me sentindo bem.

Argumentos válidos

O argumento é válido?

1. $p \rightarrow q$ (pelo enunciado)
2. $\neg p \rightarrow r$ (pelo enunciado)
3. $r \rightarrow s$ (pelo enunciado)
4. $\neg p \rightarrow s$ (silogismo hipotético de (2) e (3))
5. $\neg q \rightarrow \neg p$ (contrapositiva de (1))
6. $\neg q \rightarrow s$ (silogismo hipotético de (4) e (5))

Argumentos válidos

O argumento é válido?

1. $p \to q$ (pelo enunciado)
2. $\neg p \to r$ (pelo enunciado)
3. $r \to s$ (pelo enunciado)
4. $\neg p \to s$ (silogismo hipotético de (2) e (3))
5. $\neg q \to \neg p$ (contrapositiva de (1))
6. $\neg q \to s$ (silogismo hipotético de (4) e (5))

É válido.

Resolução

Definição

Resolução é o nome da seguinte regra de inferência:

$$(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \rightarrow (q \lor r)$$

Resolução

Definição

Resolução é o nome da seguinte regra de inferência:

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

Se p é verdade, então r tem que ser verdade.

Se p é falso, então q tem que ser verdade.

Então, ou r ou q tem que ser verdade.

Resolução

Exemplo: Jasmim está esquiando ou não está nevando. Está nevando ou José está jogando futebol. Portanto, Jasmim está esquisando ou José está jogando futebol.

É um argumento válido por resolução.

Resolução

Mostre que $p \wedge q \vee r$ e $r \rightarrow s$ implicam $p \vee s$.

Resolução

Mostre que $p \wedge q \vee r$ e $r \rightarrow s$ implicam $p \vee s$.

1. $p \wedge q \vee r$ (pelo enunciado)
2. $r \rightarrow s$ (pelo enunciado)
3. $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (distributiva em (1))
4. $p \vee r$ (simplificação em (3))
5. $\neg r \vee s$ (equivalência da implicação em (2))
6. $(p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$ (conjunção de (4) e (5))
7. $p \vee s$ (resolução em (6)).

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$.

Se fizer calor, vou nadar. Vou nadar. Portanto, está calor.

Por que esse argumento é inválido?

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$.

Se fizer calor, vou nadar. Vou nadar. Portanto, está calor.

Por que esse argumento é inválido? Eu não disse nada sobre o que faria se não estivesse calor. Posso inclusive nadar nesse caso!

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(p \to q) \wedge q \to p$.

Conhecida como **falácia da afirmação da conclusão**.

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$.

Se eu fizer todos os exercícios do Rosen, vou aprender Matemática Discreta. Não fiz todos os exercícios do Rosen. Portanto, não aprendi Matemática Discreta.

Por que esse argumento é inválido?

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$.

Se eu fizer todos os exercícios do Rosen, vou aprender Matemática Discreta. Não fiz todos os exercícios do Rosen. Portanto, não aprendi Matemática Discreta.

Por que esse argumento é inválido? Porque é possível aprender Matemática Discreta sem fazer todos os exercícios do Rosen.

Hipótese falsa com conclusão verdadeira, também é uma sentença verdadeira!

Falácia

Falácias são argumentos inválidos baseados em regras de inferência incorretas.

Exemplo: $(p \to q) \land \neg p \to \neg q$.

Conhecida como **falácia da negação das hipóteses**.

Referências

Kenneth ROSEN. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill Education, 6th edition (July 26, 2006).

Judith L. GERSTING. **Mathematical Structures for Computer Science**. 5th Ed.